বীজ গণিত

বর্গের সূত্রাবলি এবং মান নির্ণয়

■ $x = 3 + \frac{1}{x}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$

প্রমান : $x = 3 + \frac{1}{x}$

বা, $x - \frac{1}{x} = 3$

বা, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2.x.\frac{1}{x} = 9$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 + 2$

বা, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$

বা, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (11)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} + 2.x^2.\frac{1}{x^2} = 121$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 121 - 2$

বা, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$

বা, $x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$

$\therefore x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$ (প্রমাণিত)

বিকল্প :

$x = 3 + \frac{1}{x}$ $\therefore x - \frac{1}{x} = 3$

ফলে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x.\frac{1}{x}$

$= 3^2 + 2 = 9 + 2 = 11$

আবার, $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2.x^2.\frac{1}{x^2}$

$= 11^2 - 2 \quad [\because x^2 + \frac{1}{x^2} = 11]$

$= 121 - 2 = 119$

অতএব, $x^4 = 119 - \frac{1}{x^4}$ (প্রমাণিত)

$a + b = \sqrt{3}$ এবং $a - b = \sqrt{2}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $8ab(a^2 + b^2) = 5$

সমাধান:

আমরা জানি,

$ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$

$= \frac{1}{4}\left\{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right\}$

$= \frac{1}{4}\{3 - 2\} = \frac{1}{4}$

আবার, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$= (\sqrt{3})^2 - 2.\frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$.

$\therefore$ L. H. S $= 8ab(a^2 + b^2)$

$= 8.\frac{1}{4}.\frac{5}{2} = 5$

$\therefore$ L. H. S = R. H. S (প্রমাণিত)

বিকল্প :

বামপক্ষ: $8ab(a^2 + b^2)$

$= 4ab \times 2(a^2 + b^2)$

$= \{(a+b)^2 - (a-b)^2\}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

$= \{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\}\{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2\}$

$= (3 - 2)(3 + 2)$

$= 1 \times 5$

$= 5 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

■ **$a + \frac{1}{a} = 2$ হলে দেখান যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^4 + \frac{1}{a^4}$.**

প্রমান : L. H. S $= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2.a.\frac{1}{a}$

$= (2)^2 - 2$

$= 4 - 2 = 2$

R. H. S $= a^4 + \frac{1}{a^4}$

$= (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2.a^2.\frac{1}{a^2}$

$= \left\{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2.a.\frac{1}{a}\right\}^2 - 2$

$= \{(2)^2 - 2\}^2 - 2$

$= (4-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ L. H. S = R. H. S (দেখানো হলো)

■ $(p + q)^2 = \sqrt[3]{27}$ এবং $p^2 = \sqrt{6} + q^2$ হলে $p^3q + pq^3 =$ কত?

সমাধান:

এখানে, $(p + q)^2 = \sqrt[3]{27} = 3 \therefore p + q = \sqrt{3}$

এবং $p^2 = \sqrt{6} + q^2$

বা, $p^2 - q^2 = \sqrt{6}$

বা, $(p + q)(p - q) = \sqrt{6}$

বা, $\sqrt{3}\,(p - q) = \sqrt{6}$

$\therefore p - q = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

এখন, $p^3q + pq^3 = pq\,(p^2 + q^2)$

$$= \left\{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right\} \frac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$$

$$= \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\} \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) \times \frac{3+2}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8} \text{ Ans.}$$

■ দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করুন : **(3x + 5y) (7x – 5y)**

সমাধান:

আমরা জানি, $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$\therefore (3x + 5y)(7x$

$$= \left(\frac{3x + 5y + 7x - 5y}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x + 5y - 7x + 5y}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{10x}{2}\right)^2 - \left(\frac{10y - 4x}{2}\right)^2$$

$$= (5x)^2 - (5y - 2x)^2 \quad \text{Ans.}$$

ঘনের সূত্রাবলি এবং মান নির্ণয়

■ $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 50$ এবং $abc = 60$ হলে $a^3 + b^3 + c^3 =$ কত?

সমাধান:

আমরা জানি,

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

বা, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

বা, $(12)^2 = 50 + 2(ab + bc + ca)$ [মান বসিয়ে]

বা, $144 = 50 + 2(ab + bc + ca)$

বা, $144 - 50 = 2(ab + bc + ca)$

বা, $94 = 2(ab + bc + ca)$

বা, $ab + bc + ca = \frac{94}{2}$

$\therefore\ ab + bc + ca = 47$

এখন, $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= (a + b + c)\{(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)\} + 3abc$

$= 12 \times (50 - 47) + 3 \times 60$ [মান বসিয়ে]

$= 12 \times 3 + 180$

$= 36 + 180$

$= 216$ **Ans.**

বিকল্প : $a^3 + b^3 + c^3$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c) . 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)\} + 3abc$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c)^2\} + 3abc$

$= \frac{1}{2} \times 12\{2 \times 50 + 50 - 12^2\} + 3 \times 60$

$= 6\{150 - 144\} + 180$

$= 6 \times 6 + 180$

$= 36 + 180 = 216$ **Ans.**

■ **$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

$x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ $\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

$= \frac{1\ \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})\ (\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

ফলে, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

অতএব, $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= (2\sqrt{3})^3 - 3 \times 2\sqrt{3}$

$= (8 \times 3\sqrt{3}\ ) - 6\sqrt{3}$

$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= 18\sqrt{3}$ **Ans.**

■ **$a^2 + b^2 = c^2$ হলে দেখান যে, $a^6 + b^6 + 3a^2b^2c^2 = c^6$**

সমাধান:

বামপক্ষ, $a^6 + b^6 + 3a^2b^2c^2$

$= (a^2)^3 + (b^2)^3 + 3a^2b^2(a^2 + b^2)$ $\{\because a^2 + b^2 = c^2\}$

$= (a^2 + b^2)^3$

$= (c^2)^3$

$= c^6 =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

■ **যদি $2x = \frac{2}{x} + 3$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $8x^3 = \frac{8}{x^3} + 63.$**

সমাধান:

দেয়া আছে, $2x = \frac{2}{x} + 3 \Rightarrow 2x - \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3 \Rightarrow (x$

আবারও, $2x = \frac{2}{x} + 3 \Rightarrow 2x - \frac{2}{x} = 3$

$\Rightarrow \left(2x - \frac{2}{x}\right)^3 = (3)^3$ *[উভয় পক্ষকে ঘন করে]*

$\Rightarrow (2x)^3 - \left(\frac{2}{x}\right)^3 - 3 \cdot 2x \cdot \frac{2}{x}\left(2x - \frac{2}{x}\right) = 27$

$\Rightarrow 8x^3 - \frac{8}{x^3} - 12\left(2x - \frac{2}{x}\right) = 27$

$$\Rightarrow\ 8x^3 - \frac{8}{x^3} - 12 \cdot 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow\ 8x^3 - \frac{8}{x^3} - 24 \cdot \frac{3}{2} = 27$$

$$\Rightarrow\ 8x^3 - \frac{8}{x^3} - 36 = 27$$

$$\Rightarrow\ 8x^3 = 27 + \frac{8}{x^3} + 36$$

$$\Rightarrow\ 8x^3 = 63 + \frac{8}{x^3}$$

$\therefore\ 8x^3 = \frac{8}{x^3} + 63$ (প্রমাণিত)

■ **যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $ab + bc + ca = 0$**

সমাধান:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

বা, $\frac{b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3}{a^3b^3c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\frac{a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3}{a^2b^2c^2} = 3$

বা, $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2$

বা, $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2 = 0$

বা, $(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 - 3.ab.bc.ca = 0$

বা, $\frac{1}{2}(ab + bc + ca)\{(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca{-}ab)^2 = 0$

বা, $(ab + bc + ca)\{(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0$

অতএব, $ab + bc + ca = 0$

অথবা, $(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 = 0$

[কতগুলো বর্গের সমষ্টি ০ হবে তখনই যখনই ঐ বর্গগুলো প্রত্যেকটির মান ০ হবে]

$\therefore (ab - bc)^2 = 0$ বা, $ab - bc = 0$ বা, $ab = bc$ বা, $a = c$

আবার, $(bc - ca)^2 = 0$ বা, $bc - ca = 0$ বা, $bc = ca$ বা, $b = a$

$\therefore a = b = c.$

অতএব, $ab + bc + ca = 0$ অথবা, $a = b = c$ (প্রমাণিত)

■ $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ হলে $\frac{x^6+1}{x^3}$ এর মান কত?

সমাধান:

$$x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$$

বা, $x^2 + 1 = \sqrt{3}x$

বা, $\frac{x^2+1}{x} = \frac{\sqrt{3}x}{x}$

বা, $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

এখন, $\frac{x^6+1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{3})^3 - 3\cdot\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$= 0$ **Ans.**

■ **$a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$ হলে, প্রমাণ করুন যে, a^3+b^3+ $3abc = 4(x^3+y^3+z^3 - 3xyz)$**

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = y + z - x$ .... *(i)*

$b = z + x - y$ ....*(ii)*

$c = x + y - z$ ....*(iii)*

সমীকরণ *(i)* + *(ii)* + *(iii)* হতে পাই, $a + b + c = y + z - x + z + x - y + x + y -$

$= x + y + z$

সমীকরণ *(i)* বিয়োগ সমীকরণ *(ii)* হতে পাই, $a - b = y + z - x - z - x + y = 2(y-$

সমীকরণ *(ii)* বিয়োগ সমীকরণ *(iii)* হতে পাই, $b - c = z + x - y - x - y + z = 2(z-$

সমীকরণ *(iii)* বিয়োগ সমীকরণ *(i)* হতে পাই, $c - a = x + y - z - y - z + x = 2(x - z$

L.H.S $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{4(y - x)^2 + 4(z - y)^2 + 4(x - z)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}.4(x + y + z)\{y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2zy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2\}$$

$$= \frac{1}{2}.2.4(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= 4(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \text{ (R.H.S)}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S (প্রমাণিত)

■ যদি $x = (p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3}$ এবং $p^2 - q^2 = r^3$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 3rx - 2p = 0$ (

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$x = (p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3}$$

উভয় পক্ষকে ঘন করে পাই,

বা, $x^3 = \left\{(p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3}\right\}^3$

বা, $x^3 = \left\{(p+q)^{1/3}\right\}^3 + \left\{(p-q)^{1/3}\right\}^3 + 3(p+q)^{1/3}.(p-q)^{1/3} \times \left\{(p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3}\right\}$

বা, $x^3 = p+q+p-q+3(p^2-q^2)^{1/3} \times x \qquad \{\because x = (p+q)^{1/3} + (p-q)^{1/3}\}$

বা, $x^3 = 2p + 3(r^3)^{1/3} x \qquad \{\because r^3 = p^2 - q^2\}$

বা, $x^3 = 2p + 3rx$

$\therefore \ x^3 - 3rx - 2p = 0$

$\therefore$L.H.S = R.H.S (প্রমাণিত)

উৎপাদক নির্ণয়

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

সমাধান:

$a^3 - 9b^3 + (a+b)^3$

$= a^3 - b^3 + (a+b)^3 - 8b^3$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a+b)^3 - (2b)^3$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a+b-2b)\{(a+b)^2 + (a+b)2b + (2b)^2\}$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + 2b^2 + 4b^2)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + a^2 + 4ab + 7b^2)$

$= (a-b)(2a^2 + 5ab + 8b^2)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$\frac{x^6}{27} + y^6$

সমাধান:

$\frac{x^6}{27} + y^6$

$= \left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + (y^2)^3$

$= \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)\left\{\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{x^2}{3}.y^2 + (y^2)^2\right\}$

$= \left(\frac{x^2}{3} + y^2\right)\left(\frac{x^4}{9} - \frac{x^2y^2}{3} + y^4\right)$ **Ans.**

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$\mathbf{m^3 - n^3 - m(m^2 - n^2) + n(m - n)^2}$

সমাধান:

$m^3 - n^3 - m(m^2 - n^2) + n(m - n)^2$

$= (m - n)(m^2 + mn + n^2) - m(m + n)(m - n) + n(m - n)(m - n)$

$= (m - n)\{m^2 + mn + n^2 - m(m + n) + n(m - n)\}$

$= (m - n)\{m^2 + mn + n^2 - m^2 - mn + mn - n^2)$

$= (m - n)\,mn$

$= mn\,(m - n)$ **Ans.**

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$\mathbf{\frac{1}{2}m(v + 2n)^2 - \frac{1}{2}m(v + n)^2}$

সমাধান:

$= \frac{1}{2}m\{(v + 2n)^2 - (v + n)^2\}$

$= \frac{1}{2}m(v + 2n + v + n)(v + 2n - v - n)\}$

$= \frac{1}{2}m(2v + 3n)\,n$

$= \frac{1}{2}mn(2v + 3n)$ **Ans.**

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$\mathbf{2\sqrt{2}x^3 + 125}$

সমাধান:

$2\sqrt{2}x^3 + 125$

$= (\sqrt{2}x)^3 + 5^3$

$= (\sqrt{2}x + 5)\{(\sqrt{2}x)^2 - \sqrt{2}x.5 + 5^2\}$

$= (\sqrt{2}x + 5)(2x^2 - 5\sqrt{2}x + 25)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$

সমাধান:

$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1$

$= x^2 - ax - \frac{x}{a} + 1$

$= x(x - a) - \frac{1}{a}(x - a) = (x - a)\left(x - \frac{1}{a}\right)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$x^2 + x - (a + 1)(a + 2)$

সমাধান:

$x^2 + x - (a + 1)(a + 2)$

$= x^2 + x - (a + 1)(a + 1 + 1)$ *$a + 1 = p$ ধরে প্রদত্ত রাশি $= x^2 + x - p(p + 1)$*

$= x^2 + x - p^2 - p$

$= x^2 - p^2 + x - p$

$= (x + p)(x - p) + (x - p)$

$= (x - p)(x + p + 1)$

$= \{x - (a + 1)\}\{x + a + 1 + 1\}$ *[p এর মান বসিয়ে]*

$= (x - a - 1)(x + a + 2)$ **Ans.**

বিকল্প: $x^2 + x - (a + 1)(a + 2)$

$= x^2 + x - (a + 1)(a + 1 + 1)$

$= x^2 + x - (a + 1)^2 - (a + 1)$

$= x^2 - (a + 1)^2 + x - (a + 1)$

$= (x + a + 1)(x - a - 1) + x - a - 1$

$= (x - a - 1)(x + a + 1 + 1)$

$= (x - a - 1)(x + a + 2)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$16^2 + 25y^2 - 8xz + 10yz$

সমাধান:

$16^2 + 25y^2 - 8xz + 10yz$

$= (4x)^2 - (5y)^2 - 2z(4x - 5y)$

$= (4x + 5y)(4x - 5y) - 2z(4x - 5y)$

$= (4x - 5y)(4x + 5y - 2z)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :
$4(a-2)x^2 + a^2xy + (a+2)y^2$

সমাধান:

$$\begin{aligned}
& 4(a-2)x^2 + a^2xy + (a+2)y^2 \\
&= 4(a-2)x^2 + (a^2-4)xy + 4xy + (a+2)y^2 \\
&= 4(a-2)x^2 + (a+2)(a-2)xy + 4xy + (a+2)y^2 \\
&= (a-2)x\{4x + (a+2)y\} + y\{4x + (a+2)y\} \\
&= (a-2)x(4x + ay + 2y) + y(4x + ay + 2y) \\
&= (4x + ay + 2y)(ax - 2x + y) \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

বিকল্প:

$4px^2 + (pq+4)xy + qy^2$ [$a - 2 = p$ এবং $a + 2 = 2$ ধরে]

$$\begin{aligned}
&= 4px^2 + pqxy + 4xy + qy^2 \\
&= 4px^2 + 4xy + pqxy + qy^2 \\
&= 4x(px + y) + qy(px + y) \\
&= (4x + qy)(px + y)
\end{aligned}$$

$= \{4x + (a+2)y\}\{(a-2)x + y\}$ [p ও q এর মান বসিয়ে]

$= (4x + ay + 2y)(ax - 2x + y)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :
$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

সমাধান:

$$\begin{aligned}
& 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\
&= 4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\
&= (2bc)^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2) \\
&= (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2 \\
&= (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2) \\
&= \{(a)^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)\}\{b^2 + 2bc + c^2 - a^2\} \\
&= \{(a)^2 - (b-c)^2\}\{(b+c)^2 - (a)^2\} \\
&= (a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :
$(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2.$

সমাধান: $(a-1)x^2 + a^2xy + (a+1)y^2$

$$\begin{aligned}
&= (a-1)x^2 + (a^2-1)xy + xy + (a+1)y^2 \\
&= (a-1)x^2 + (a+1)(a-1)xy + xy + (a+1)y^2 \\
&= (a-1)x(x + ay + y) + y(x + ay + y) \\
&= (x + ay + y)(ax + x - y) \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) - 15$

সমাধান:

$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) - 15$

$= a(a + 3)(a + 1)(a + 2) - 15$

$= (a^2 + 3a)(a^2 + a + 2a + 2) - 15$

$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) - 15$

এখন, $a^2 + 3a = p$ ধরলে প্রদত্ত রাশিমালা

$p(p + 2) - 15$

$= p^2 + 2p - 15$

$= p^2 - 3p + 5p - 15$

$= p(p - 3) + 5(p - 3)$

$= (p - 3)(p + 5)$

$= (a^2 + 3a - 3)(a^2 + 3a + 5)$ (p এর মান বসিয়ে)

$= (a^2 + 3a - 3)(a^2 + 3a + 5)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$8x^3 - 4x - 1$

সমাধান:

$8x^3 - 4x - 1$

$= 8x^3 + 1 - 4x - 2$

$= (8x^3 + 1) - 2(2x + 1)$

$= (2x)^3 + (1)^3 - 2(2x + 1)$

$= (2x + 1)\{(2x)^2 - 2x.1 + (1)^2\} - 2(2x + 1)$

$= (2x + 1)\{(4x^2 - 2x + 1) - 2(2x + 1)\}$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1 - 2)$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x - 1)$ **Ans.**

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$ax^2 + (a^2 + 1)x + a$

সমাধান:

$ax^2 + (a^2 + 1)x + a$

$= ax^2 + a^2x + x + a$

$= ax(x + a) + 1(x + a)$

$= (x + a)(ax + 1)$ **Ans.**

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$\mathbf{5(x+y)^2 + 18(x^2 - y^2) - 8(x-y)^2}$

সমাধান:

$5(x+y)^2 + 18(x^2 - y^2) - 8(x-y)^2$

$= 5(x+y)^2 + 18(x+y)(x-y) - 8(x-y)^2$

মনেকরি,

$x + y = a$ এবং $x - y = b$

প্রদত্ত রাশিমালা $= 5a^2 + 18ab - 8b^2$

$= 5a^2 + 20ab - 2ab - 8b^2$

$= 5a(a+4b) - 2b(a+4b)$

$= (a+4b)(5a-2b)$

x ও y এর মান বসিয়ে,

$= (x+y+4x-4y)(5x+5y-2x+2y)$

$= (5x-3y)(3x+7y)$ **Ans.**

বিকল্প : $5(x+y)^2 + 18(x^2-y^2) - 8(x-y)^2$

$= 5(x+y)^2 + 18(x+y)(x-y) - 8(x-y)^2$

$= 5(x+y)^2 + 20(x+y)(x-y) - 2(x+y)(x-y) - 8(x-y)^2$

$= 5(x+y)(x+y+4x-4y) - 2(x-y)(x+y+4x-4y)$

$= (5x+5y)(5x-3y) - (2x-2y)(5x-3y)$

$= (5x-3y)(5x+5y-2x+2y)$

$= (5x-3y)(3x+7y)$ **Ans.**

■ $\mathbf{(x^2+2x)^2 + 12(x^2+2x) - 45}$ **কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।**

সমাধান:

$(x^2+2x)^2 + 12(x^2+2x) - 45$

ধরি, $x^2 + 2x = a$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= a^2 + 12a - 45$

$= a^2 + 15a - 3a - 45$

$= a(a+15) - 3(a+15)$

$= (a+15)(a-3)$

a এর মান বসিয়ে,

$= (x^2+2x+15)(x^2+2x-3)$

$= (x^2+2x+15)(x^2+3x-x-3)$

$= (x^2+2x+15)\{x(x+3) - 1(x+3)\}$

$= (x^2+2x+15)(x+3)(x-1)\}$ **Ans.**

বিকল্প:

$$(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$$
$$=(x^2+2x)^2+15(x^2+2x)-3(x^2+2x)-45$$
$$=(x^2+2x)(x^2+2x+15)-3(x^2+2x+15)$$
$$=(x^2+2x+15)(x^2+2x-3)$$
$$=(x^2+2x+15)(x^2+3x-x-3)$$
$$=(x^2+2x+15)\{x(x+3)-1(x+3)\}$$
$$=(x^2+2x+15)(x+3)(x-1) \textbf{ Ans.}$$

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$4a^4-4a^2+9$

সমাধান:

$$4a^4-4a^2+9$$
$$=(2a^2)^2+2.2a^2.3+3^2-16a^2$$
$$=(2a^2+3)^2-(4a)^2$$
$$=(2a^2+3+4a)(2a^2+3-4a)$$
$$=(2a^2+4a+3)(2a^2-4a+3) \textbf{ Ans.}$$

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$

সমাধান:

$$a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$$
$$=a^2-(b^2+2bc+c^2)+a-b-c$$
$$=a^2-(b+c)^2+a-b-c$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)+1(a-b-c)$$
$$=(a-b-c)(a+b+c+1) \textbf{ Ans.}$$

বহুপদীর উৎপাদক

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$$54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$$

সমাধান:

ধরি, $f(x) = 54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

ফলে, $f\left(-\frac{1}{2}a\right) = 54\left(-\frac{1}{2}a\right)^4 + 27\left(-\frac{1}{2}a\right)^3.a - 16\left(-\frac{1}{2}a\right) - 8a$

$$= 54 \times \frac{a^4}{16} - 27 \times \frac{a^3}{8}.a + 8a - 8a$$

$$= \frac{27}{8}a^4 - \frac{27}{8}a^4 + 8a - 8a = 0$$

অতএব, $x = \left(-\frac{1}{2}a\right)$ বা, $(2x + a)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন, $54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$= 27x^3(2x + a) - 8(2x + a)$

$= (2x + a)(27x^3 - 8)$

$= (2x + a)\{(3x)^3 - 2^3\}$

$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **Ans.**

বিকল্প :

$54x^4 + 27x^3a - 16x - 8a$

$= 27x^3(2x + a) - 8(2x + a)$

$= (2x + a)(27x^3 - 8)$

$= (2x + a)\{(3x)^3 - 2^3\}$

$= (2x + a)(3x - 2)\{(3x)^2 + 3x.2 + 2^2\}$

$= (2x + a)(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **Ans.**

■ **উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :**

$$x^4 - 4x + 3$$

সমাধান:

মনে করি,

$f(x) = x^4 - 4x + 3$

$\therefore f(1) = (1)^4 - 4.1 + 3$

$= 1 - 4 + 3 = 0$

$\therefore (x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 - 4x + 3$

$= x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x - 3x + 3$

$= x^3(x-1) + x^2(x-1) + x(x-1) - 3(x-1)$

$= (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)$

$= (x-1)\{x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + 3x - 3\}$
$= (x-1)\{x^2(x-1) + 2x(x-1) + 3(x-1)\}$
$= (x-1)(x-1)(x^2 + 2x + 3)$
$= (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$ Ans.

বিকল্প: $x^4 - 4x + 3$
$= x^4 - x - 3x + 3$
$= x(x^3 - 1) - 3(x-1)$
$= x(x^3 - 1^3) - 3(x-1)$
$= x(x-1)(x^2 + x + 1) - 3(x-1)$
$= (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)$
$= (x-1)\{x^3 - 1^2 + x^2 + x - 2\}$
$= (x-1)\{(x-1)(x^2 + x + 1) + x^2 + 2x - x - 2\}$
$= (x-1)\{(x-1)(x^2 + x + 1) + x(x+2) - 1(x+2)\}$
$= (x-1)\{(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(x+2)\}$
$= (x-1)\{(x-1)(x^2 + x + 1 + x + 2)\}$
$= (x-1)(x-1)(x^2 + 2x + 3)$
$= (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$ Ans.

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$3x^5 + 2x + 5$

সমাধান:

$3x^5 + 2x + 5$

এখানে, $f(x) = 3x^5 + 2x + 5$ হলে, $x = -1$ ধরলে প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়।

কেননা, $x = -1$ হলে, $3x^5 + 2x + 5 = 3(-1)^5 + 2(-1) + 5 = -3 - 2 + 5 = 0$

এখন, $x - (-1)$ বা, $(x + 1)$ এ রাশির একটি সহজ উৎপাদক।

$\therefore 3x^5 + 2x + 5 = 3x^5 + 3x^4 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^3 - 3x^2 - 3x^2 - 3x + 5x + 5$
$= 3x^4(x+1) - 3x^3(x+1) + 3x^2(x+1) - 3x(x+1) + 5(x+1)$
$= (x+1)(3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 5)$ Ans.

■ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন :

$a^3 - 3a^2b + 2b^3$

সমাধান:

$a^3 - 3a^2b + 2b^3$

ধরি, $f(a) = a^3 - 3a^2b + 2b^3$

$\therefore f(b) = b^3 - 3b^2.b + 2b^3$
$= b^3 - 3b^3 + 2b^3$
$= 3b^3 - 3b^3$
$= 0$

$\therefore (a-b)$, $f(b)$ এর একটি উৎপাদক

এখানে,

$$a^3 - 3a^2b + 2b^3$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 - 2ab^2 + 2b^3$$
$$= a^2(a-b) - 2ab(a-b) - 2b^2(a-b)$$
$$= (a-b)(a^2-2ab-2b^2)$$ **Ans.**

বিকল্প: $a^3 - 3a^2b + 2b^3$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2b^3$$
$$= a^2(a-b) - 2b(a^2-b^2)$$
$$= a^2(a-b) - 2b(a+b)(a-b)$$
$$= (a-b)\{a^2 - 2b(a+b)\}$$
$$= (a-b)(a^2-2ab-2b^2)$$ **Ans.**

ল.সা.গু ও গ.সা.গু

■ **$a^2b(a^3-b^3)$, $a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$ এবং a^3+b^3 এর ল.সা.গু নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

প্রথম রাশি,

$$a^2b(a^3-b^3)$$
$$= a^2b(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

দ্বিতীয় রাশি,

$$a^2b^2(a^4+a^2b^2+b^4)$$
$$= a^2b^2\{(a^2)^2 + 2.a^2b^2 + (b^2)^2 - a^2b^2\}$$
$$= a^2b^2\{(a^2+b^2)^2 - (ab)^2\}$$
$$= a^2b^2(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$
$$= a^2b^2(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

তৃতীয় রাশি,

$$a^3+b^3$$
$$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু $= a^2b^2(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= a^2b^2(a^3-b^3)(a^3+b^3)$$
$$= a^2b^2(a^6-b^6)$$ **Ans.**

■ **$a^2-b^2-c^2-2bc$, $b^2-c^2-a^2-2ca$ এবং $c^2-a^2-b^2-2ab$ এর ল.সা.গু কত?**

সমাধান:

১ম রাশি $= a^2-b^2-c^2-2bc$

$$= a^2-(b^2+c^2+2bc)$$
$$= a^2-(b+c)^2$$
$$= (a+b+c)(a-b-c)$$

২য় রাশি $= b^2-c^2-a^2-2ca$

$$= b^2-(c^2+a^2+2ca)$$

$= (b)^2 - (c + a)^2$

$= (b + c + a)(b - c - a)$

$= (a + b + c)(b - c - a)$

৩য় রাশি $= c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

$= c^2 - (a^2 + b^2 + 2ab)$

$= c^2 - (a + b)^2$

$= (c + a + b)(c - a - b)$

$= (a + b + c)(c - a - b)$

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু $= (a + b + c)(a - b - c)(b - c - a)(c - a - b)$ **Ans.**

■ **$5(a^4 + 2a^2 + 1), 3(a^6 + a^4 - a^2 - 1)$ এবং $15(a^4 - 1)$ এর গ.সা.গু কত?**

সমাধান:

১ম রাশি $= 5(a^4 + 2a^2 + 1)$

$= 5\{(a^2)^2 + 2.a^2.1. + 1^2\}$

$= 5(a^2 + 1)^2$

$= 5(a^2 + 1)(a^2 + 1)$

২য় রাশি $= 3(a^6 + a^4 - a^2 - 1)$

$= 3\{a^4(a^2 + 1) - 1(a^2 + 1)\}$

$= 3(a^2 + 1)(a^4 - 1)$

$= 3(a^2 + 1)\{(a^2)^2 - 1\}$

$= 3(a^2 + 1)(a^2 + 1)(a^2 - 1)$

$= 3(a^2 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

৩য় রাশি $= 15(a^4 - 1)$

$= 5\{(a^2)^2 - 1\}$

$= 15(a^2 + 1)(a^2 - 1)$

$= 15(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু $= a^2 + 1$ **Ans.**

■ **$a^3 - 3a^2 - 10a, a^3 + 6a^2 + 8a$ এবং $a^4 - 5a^3 - 14a^2$ এর গ.সা.গু কত?**

সমাধান:

১ম রাশি $= a^3 - 3a^2 - 10a$

$= a(a^2 - 3a - 10)$

$= a(a^2 - 5a + 2a - 10)$

$= a\{a(a - 5) + 2(a - 5)\}$

$= a(a - 5)(a + 2)$

২য় রাশি $= a^3 + 6a^2 + 8a$

$= a^3 + 4a^2 + 2a^2 + 8a$

$= a^2(a + 4) + 2a(a + 4)$

$= (a + 4)(a^2 + 2a)$

$= (a + 4)\{a(a + 2)\}$

$= a(a + 4)(a + 2)$

৩য় রাশি $= a^4 + 5a^3 - 14a^2$

$= a^4 - 7a^3 + 2a^3 - 14a^2$

$= a^3(a - 7) + 2a^2 (a - 7)$

$= (a - 7) (a^3 + 2a^2)$

$= (a - 7) \{a^2 (a + 2)\}$

$= a^2 (a + 2) (a - 7)$

$= a.a(a + 2) (a - 7)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু $= a(a + 2)$ **Ans.**

■ $\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)$ কে $\frac{x - y - 1}{x}$ দ্বারা ভাগ করুন।(ল. সা. গু, গ.

সমাধান:

$$\left\{\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \left\{\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y}\left(\frac{x^3 - y^3}{xy}\right)\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \left\{\frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} - \frac{x^3 - y^3}{xy(x+y)}\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \left\{\frac{(x+y)(x^2 - y^2) - xy - x^3 + y^3}{xy(x+y)}\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \left\{\frac{x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 - xy - x^3 + y^3}{xy(x+y)}\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \left\{\frac{x^2y - xy^2 - xy}{xy(x+y)}\right\} \div \left(\frac{x-y-1}{x}\right)$$

$$= \frac{xy(x-y-1)}{xy(x+y)} \times \frac{x}{(x-y-1)}$$

$$= \frac{x}{x+y} \text{ Ans.}$$

বীজগণিতীয় সরল

■ সরল করুন :

$$\frac{x^2y}{xy+y^2+yz}+\frac{y^2x}{x^2+xy+zx}+\frac{z^3}{z^2+zx+yz}$$

সমাধান: $\frac{x^2y}{xy+y^2+yz}+\frac{y^2x}{x^2+xy+zx}+\frac{z^3}{z^2+zx+yz}$

$=\frac{x^2y}{y(x+y+z)}+\frac{y^2x}{x(x+y+z)}+\frac{z^3}{z(x+y+z)}$

$=\frac{x^2}{x+y+z}+\frac{y^2}{x+y+z}+\frac{z^2}{x+y+z}$

$=\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$ Ans.

■ সরল করুন :

$$\frac{a}{a^2-a(b+c)+bc}+\frac{b}{b^2-b(c+a)+ca}+\frac{c}{c^2-c(a+b)+ab}$$

সমাধান: $\frac{a}{a^2-a(b+c)+bc}+\frac{b}{b^2-b(c+a)+ca}+\frac{c}{c^2-c(a+b)+ab}$

$=\frac{a}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{b}{b^2-bc-ab+ca}+\frac{c}{c^2-ca-bc+ab}$

$=\frac{a}{a(a-b)-c(a-b)}+\frac{b}{b(b-c)-a(b-c)}+\frac{c}{c(c-a)-b(c-a)}$

$=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{a}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{ab-ca+bc-ab+ca-bc}{-(a-b)(b-c(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0$ Ans.

■ সরল করুন :

$$\frac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{(x+y)^2-4xy}\div\frac{(x-y)^2+4xy}{x^3+y^3-3xy(x-y)}$$

সমাধান: $\frac{x^3+y^3+3xy(x+y)}{(x+y)^2-4xy}\div\frac{(x-y)^2+4xy}{x^3+y^3-3xy(x-y)}$

$=\frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}\div\frac{(x+y)^2}{(x-y)^3}$

$=\frac{(x+y)^3}{(x-y)^2}\times\frac{(x-y)^3}{(x+y)^2}$

$$= \frac{(x+y)(x+y)(x+y)}{(x-y)(x-y)} \times \frac{(x-y)(x-y)(x-y)}{(x+y(x+y)}$$

$= (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ **Ans.**

■ **সরল করুন :**

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right) \div \left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right) \times \frac{a^2+ab+b^2}{b(a^2-ab+b^2)}$$

সমাধান: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right) \div \left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1\right) \times \frac{a^2+ab+b^2}{b(a^2-ab+b^2)}$

$$= \frac{a^2+b^2-ab}{ab} \div \frac{a^2+ab+b^2}{b^2} \times \frac{a^2+ab+b^2}{b(a^2-ab+b^2)}$$

$$= \frac{a^2+b^2-ab}{ab} \times \frac{b^2}{a^2+ab+b^2} \times \frac{a^2+ab+b^2}{b(a^2-ab+b^2)} = \frac{1}{a}$$ **Ans.**

■ **সরল করুন :**

$$\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{2a(a-b)} \div \frac{a+b}{a^2-ab-2b^2} \div \frac{a^2+b^2}{4a^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-2b}$$

সমাধান: $\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{2a(a-b)} \div \frac{a+b}{a^2-ab-2b^2} \div \frac{a^2+b^2}{4a^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-2b}$

$$= \frac{a^2(a+b)+b^2(a+b)}{2a(a-b)} \div \frac{a+b}{a^2-2ab+ab-2b^2} \div \frac{a^2+b^2}{4a^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-2b}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2a(a-b)} \div \frac{a+b}{a(a-2b)+b(a-2b)} \div \frac{a^2+b^2}{4a^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-2b}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{2a(a-b)} \times \frac{(a-2b)(a+b)}{a+b} \times \frac{4a^2}{a^2+b^2} \times \frac{(a+b)(a-b)}{a-2b}$$

$= 2a(a+b)^2$ **Ans.**

■ **সরল করুন :**

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$$

সমাধান: $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) \div \left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$

$$= \left\{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}\right\} \div \left\{\frac{a-b}{a+b}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\right\}$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2+a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} \div \frac{a^3-a^2b+ab^2-a^2b+ab^2-b^3-a^3+b^3}{(a+b)(a^2-ab+b)}$$

$$= \frac{2a^2+2ab+2b^2}{(a+b)(a-b)} \times \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{-2a^2b+2ab^2}$$

$$= \frac{2(a^2+ab+b^2)}{(a+b)(a-b)} \times \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{-2ab(a-b)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}{-ab(a-b)^2}$$

$$= -\frac{(a^2+b^2)^2-(ab)^2}{ab(a-b)^2}$$

$$= -\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2}{ab(a-b)^2}$$

$$= -\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2} \text{ Ans.}$$

■ **সরল করুন :**

$$\frac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)} \times \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}$$

সমাধান: $$\frac{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)} \times \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}}$$

$$= \frac{\frac{(a^3)^2-(b^3)^2}{a^3b^3}}{\frac{a^2-b^2}{ab}\times\frac{a^2+b^2-ab}{ab}} \times \frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{a^2+b^2+ab}{a^2b^2}}$$

$$= \frac{\frac{(a^3+b^3)(a^3-b^3)}{a^3b^3}}{\frac{(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}} \times \frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{a^2+b^2+ab}{a^2b^2}}$$

$$= \frac{(a^3+b^3)(a^3-b^3)}{a^3b^3} \times \frac{a^2b^2}{(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)} \times \frac{a-b}{ab} \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2\times ab} \times \frac{ab\times ab}{(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\times \frac{ab(a-b)}{a^2+ab+b^2}$$

$$= (a-b) \text{ Ans.}$$

■ সরল করুন :

$$\frac{1}{a-b}-\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{2a-b}$$

সমাধান: $\frac{1}{a-b}-\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{2a-b}$

$$=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}-\left(\frac{2}{2a+b}+\frac{2}{2a-b}\right)$$

$$=\frac{a+b+a-b}{(a+b)(a-b)}-\frac{4a-2b+4a+2b}{(2a+b)(2a-b)}$$

$$=\frac{2a}{a^2-b^2}-\frac{8a}{4a^2-b^2}=\frac{8a^3-2ab^2-8a^3+8ab^2}{(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}$$

$$=\frac{6ab^2}{(a^2-b^2)(4a^2-b^2)}\text{ Ans.}$$

■ সরল করুন : $\left\{\frac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}}-\frac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{a(a-b)}{1-ab}}\right\}\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

সমাধান: $\left\{\frac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}}-\frac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{a(a-b)}{1-ab}}\right\}\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

$$=\left\{\frac{\frac{b(1+ab)+a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab-b(a-b)}{1+ab}}-\frac{\frac{a(1-ab)-(a-b)}{1-ab}}{\frac{1-ab-a(a-b)}{1-ab}}\right\}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$=\left\{\frac{b+ab^2+a-b}{1+ab}\times\frac{1+ab}{1+ab-ab+b^2}-\frac{a-a^2b-a+b}{1-ab}\times\frac{1-ab}{1-ab-a^2+ab}\right\}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$=\left\{\frac{ab^2+a}{1+b^2}-\frac{a-a^2b-a+b}{1-a^2}\right\}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$=\left\{\frac{a(1+b^2)}{1+b^2}-\frac{b-a^2b}{1-a^2}\right\}\div\frac{a^2-b^2}{ab}=\left\{a-\frac{b(1-a^2)}{(1-a^2)}\right\}\div\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$=(a-b)\div\frac{a^2-b^2}{ab}$$

$$=(a-b)\times\frac{ab}{a^2-b^2}$$

$$=(a-b)\times\frac{ab}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{ab}{a+b}\text{ Ans.}$$

■ সরল করুন : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1}$

সমাধান: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1} =$

$\frac{x^2+1-x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2}{x^4-1}$ Ans.

■ সরল করুন : $\dfrac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

সমাধান: $\dfrac{\frac{a^2}{x-a}+\frac{b^2}{x-b}+\frac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$= \dfrac{\left(\frac{a^2}{x-a}+a\right)+\left(\frac{b^2}{x-b}+b\right)+\left(\frac{c^2}{x-c}+c\right)}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$= \dfrac{\frac{a^2+ax-a^2}{x-a}+\frac{b^2+bx-b^2}{x-b}+\frac{c^2+cx-c^2}{x-c}}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$= \dfrac{\frac{ax}{x-a}+\frac{bx}{x-b}+\frac{cx}{x-c}}{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}}$

$= \dfrac{x\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)}{\left(\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}\right)}$

$= x$ Ans.

■ **সরল করুন : $(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1} \div 2y(x^2-y^2)^{-1}$**

সমাধান: $(x+y)^{-1}-(x-y)^{-1} \div 2y(x^2-y^2)^{-1}$

$$= \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \div 2y\frac{1}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \div \frac{2y}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{x-y-x-y}{(x+y)(x-y)} \div \frac{2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{-2y}{(x+y)(x-y)} \div \frac{2y}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{-2y}{(x+y)(x-y)} \times \frac{(x+y)(x-y)}{2y}$$

$= -1$ **Ans.**

সরল ও দ্বিঘাত সমীকরণ

■ $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$

সমাধান:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x}{b} + \frac{b}{x}$$

বা, $\frac{x}{a} - \frac{b}{x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{x}$

বা, $\frac{x^2-ab}{ax} = \frac{x^2-ab}{bx}$

বা, $\frac{x^2-ab}{ax} - \frac{x^2-ab}{bx} = 0$

বা, $\frac{x^2-ab}{x}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$

কিন্তু, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \neq 0$

$\therefore \frac{x^2-ab}{x} = 0$

বা, $x^2 - ab = 0$

বা, $x^2 = ab$

বা, $x = \pm\sqrt{ab}$

$\therefore$ $x = \pm\sqrt{ab}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \pm\sqrt{ab}$ **Ans.**

■ $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

সমাধান: $\frac{4}{\sqrt{10x-4}}+\sqrt{10x-4}=5$

বা, $\frac{4+(\sqrt{10x-4})\sqrt{10x-4}}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{4+(\sqrt{10x-4})^2}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{4+10x-4}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{10x}{\sqrt{10x-4}}=5$

বা, $\frac{2x}{\sqrt{10x-4}}=1$ [উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ দিয়ে]

বা, $2x=\sqrt{10x-4}$

বা, $(2x)^2=(\sqrt{10x-4})^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4x^2=10x-4$

বা, $2x^2=5x-2$

বা, $2x^2-5x+2=0$

বা, $2x^2-4x-x+2=0$

বা, $2x(x-2)-1(x-2)=0$

বা, $(x-2)(2x-1)=0$

$\therefore (x-2)=0$ অথবা, $2x-1=0$ বা, $2x=1$

$\therefore x=2$ বা, $x=\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=2$ বা, $\frac{1}{2}$ **Ans.**

■ $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

সমাধান: $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

বা, $\frac{\{(x+1)-(x-1)\}\{(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2\}}{\{(x+1)+(x-1)\}\{(x+1)-(x-1)\}}=2$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-1+x^2-2x+1}{x+1+x-1}=2$ বা, $\frac{3x^2+1}{2x}=2$

বা, $3x^2+1=4x$ বা, $3x^2-4x+1=0$

বা, $3x^2 - 3x - x + 1 = 0$ বা, $3x(x-1) - 1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(3x-1) = 0$

অতএব, $x - 1 = 0$ অথবা, $3x - 1 = 0$

বা, $x = 1$ বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 1$ বা, $x = \frac{1}{3}$ **Ans.**

■ $$\frac{x + a^2 + 2c^2}{b + c} + \frac{x + b^2 + 2a^2}{c + a} + \frac{x + c^2 + 2b^2}{a + b} = 0$$

সমাধান: $\frac{x + a^2 + 2c^2}{b + c} + \frac{x + b^2 + 2a^2}{c + a} + \frac{x + c^2 + 2b^2}{a + b} = 0$

বা, $\frac{x + a^2 + 2c^2}{b + c} + b - c + \frac{x + b^2 + 2a^2}{c + a} + c - a + \frac{x + c^2 + 2b^2}{a + b} + a - b = 0$

বা, $\frac{x + a^2 + 2c^2 + b^2 - c^2}{b + c} + \frac{x + b^2 + 2a^2 + c^2 - a^2}{c + a} + \frac{x + c^2 + 2b^2 + a^2 - b^2}{b + c} = 0$

বা, $\frac{x + a^2 + b^2 + c^2}{b + c} + \frac{x + a^2 + b^2 + c^2}{c + a} + \frac{x + a^2 + b^2 + c^2}{a + b} = 0$

বা, $(x + a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b}\right) = 0$

কিন্তু, $\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \neq 0$

ফলে, $x + a^2 + b^2 + c^2 = 0 \therefore x = -(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -(a^2 + b^2 + c^2)$ **Ans.**

■ $$\sqrt{\frac{x}{x + 16}} + \sqrt{\frac{x + 16}{x}} = \frac{25}{12}$$

সমাধান: $\sqrt{\frac{x}{x + 16}} + \sqrt{\frac{x + 16}{x}} = \frac{25}{12}$

বা, $\frac{x + x + 16}{\sqrt{x}\sqrt{x + 16}} = \frac{25}{12}$

বা, $12x + 12(x + 16) = 25\sqrt{x}\sqrt{x + 16}$

বা, $12x - 25\sqrt{x}\sqrt{x + 16} + 12(x + 16) = 0$

বা, $12x - 16\sqrt{x}\sqrt{x + 16} - 9\sqrt{x}\sqrt{x + 16} + 12(x + 16) = 0$

বা, $4\sqrt{x}(3\sqrt{x} - 4\sqrt{x + 16}) - 3\sqrt{x + 16}\,(3\sqrt{x} - 4\sqrt{x + 16}) = 0$

বা, $(3\sqrt{x} - 4\sqrt{x + 16})(4\sqrt{x} - 3\sqrt{x + 16}) = 0$

বা, $3\sqrt{x} - 4\sqrt{x + 16} = 0$ অথবা, $4\sqrt{x} - 3\sqrt{x + 16} = 0$

বা, $3\sqrt{x} = 4\sqrt{x + 16}$ বা, $4\sqrt{x} = 3\sqrt{x + 16}$

বা, $9x = 16(x + 16)$

বা, $16x - 9x = -16 \times 16$

বা, $7x = -16 \times 16$

$\therefore x = \frac{-16 \times 16}{7} = -36\frac{4}{7}$

বা, $16x = 9(x + 16)$

বা, $16x = 9x = 9 \times 16$

বা, $7x = 9 \times 16$

$\therefore x = \frac{9 \times 16}{7} = 20\frac{4}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -36\frac{4}{7}, 20\frac{4}{7}$ **Ans.**

সমাধান করুন : $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{9}{x-3}$

সমাধান: $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{9}{x-3}$

বা, $\frac{5(x-2) + 4(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{9}{x-3}$

বা, $\frac{5x-10 + 4x - 4}{(x-1)(x-2)} = \frac{9}{x-3}$

বা, $\frac{9x-14}{(x^2 - 2x - x + 2)} = \frac{9}{x-3}$

বা, $(x-3)(9x - 14) = 9(x^2 - 3x + 2)$

বা, $9x^2 - 14x - 27x + 42 = 9x^2 - 27x + 18$

বা, $9x^2 - 14x - 27x + 42 - 9x^2 + 27x - 18 = 0$

বা, $-14x + 24 = 0$

বা, $-14x = -24$ বা, $14x = 24$

বা, $x = \frac{24}{14}$ $\therefore$ $x = \frac{12}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{12}{7}$ **Ans.**

বিকল্প: $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{9}{x-3}$

বা, $\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{x-3} + \frac{4}{x-3}$

বা, $\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x-3} = \frac{4}{x-3} - \frac{4}{x-2}$

বা, $\frac{5x-15-5x+5}{(x-1)(x-3)} = \frac{4x-8-4x+12}{(x-3)(x-2)}$

বা, $\frac{-10}{x-1} = \frac{4}{x-2}$

বা, $4x - 4 = -10x + 20$

বা, $4x - 4 = - 10x + 20$

বা, $14x = 24$

$\therefore\ x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{12}{7}$ **Ans.**

■ $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3$

সমাধান: $\frac{x-a}{b+c} + \frac{x-b}{c+a} + \frac{x-c}{a+b} = 3$

বা, $\left(\frac{x-a}{b+c} - 1\right) + \left(\frac{x-b}{c+a} - 1\right) + \left(\frac{x-c}{a+b} - 1\right) = 0$

বা, $\frac{x-a-b-c}{b+c} + \frac{x-b-c-a}{c+a} + \frac{x-c-a-b}{a+b} = 0$

বা, $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = 0$

এখন, $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \neq 0$ কিন্তু, $x - a - b - c = 0$

বা, $x = a + b + c$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = a + b + c$ **Ans.**

■ **সমাধান করুন :** $\frac{5}{(2x-1)^2} - \frac{13}{2x-1} = 18$

উত্তর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত লিখতে হবে।

সমাধান: $\frac{5}{(2x-1)^2} - \frac{13}{2x-1} = 18$

বা, $\frac{5 - 13(2x-1)}{(2x-1)^2} = 18$

বা, $\frac{5 - 26x + 13}{4x^2 - 4x + 1} = 18$

বা, $\frac{-26x + 18}{4x^2 - 4x + 1} = 18$

বা, $72x^2 - 72x + 18 = - 26x + 18$

বা, $72x^2 - 72x + 26x = 18 - 18$

বা, $72x^2 - 46x = 0$

বা, $x\ (72x - 46) = 0$

বা, $x = 0$

এবং $72x - 46 = 0$

বা, $72x = 46$

বা, $x = \frac{46}{72}$

বা, $x = 0.638$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 0$ অথবা $x = 0.638$ **Ans.**

বিকল্প: $\frac{5}{(2x-1)^2} - \frac{13}{2x-1} = 18$

বা, $\frac{5}{(2x-1)^2} = 18 + \frac{13}{2x-1}$

বা, $\frac{5}{(2x-1)^2} = \frac{36x - 18 + 13}{2x-1}$

বা, $\frac{5}{2x-1} = \frac{36x-5}{1}$

বা, $72x^2 - 10x - 36x + 5 = 5$

বা, $72x^2 - 46x = 0$

বা, $x(72x - 46) = 0$

ফলে, $x = 0$ অথবা, $72x - 46 = 0$

∴ $72x = 46 \therefore x = \frac{46}{72} = 0.63$

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 0$ অথবা $x = 0.63$ **Ans.**

■ $y = ax + b$ হলে $x = 4$ এর জন্য y এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $x = 1$ এর জন্য y এর মান 4 এবং $x = 2$ এর জন্য y-এর মান 7.

সমাধান:

দেওয়া আছে, $y = ax + b$

বা, $4 = a \times 1 + b$ [$x = 1$, এবং $y = 4$ বসিয়ে]

বা, $4 = a + b$

বা, $a + b = 4$ .... (i)

আবার, $y = ax + b$

বা, $7 = a \times 2 + b$ [$x = 2$ এবং $y = 7$ বসিয়ে]

বা, $7 = 2a + b$

বা, $2a + b = 7$ .... (ii)

(ii) নং হতে (i) বিয়োগ করে পাই

$$\begin{array}{r} 2a + b = 7 \\ a + b = 4 \\ (-)\ (-)\ (-) \\ \hline a \quad\ = 3 \end{array}$$

∴ $a = 3$

(i) নং সমীকরণে 'a' এর মান বসিয়ে পাই, $a + b = 4$

বা, $3 + b = 4$

বা, $b = 4 - 3$

$\therefore \quad b = 1$

এখন প্রদত্ত সমীকরণে, $x = 4$, $a = 3$ এবং $b = 1$ বসিয়ে পাই

$y = ax + b$

বা, $y = 3 \times 4 + 1$

বা, $y = 12 + 1$

বা, $y = 13$

অতএব, $x = 4$ এর জন্য y এর মান 13 হবে। **Ans. 13**

সমীকরণের সমস্যাবলী

■ **এক ব্যক্তি 240 টাকায় কতগুলো কলম কিনে দেখলো যে, যদি একটি কলম বেশি পেত প্রতিটি কলমের মূল্য গড়ে 1 টাকা কম পড়ত। সে কতগুলো কলম কিনেছিল?**

সমাধান:

মনে করি, নির্ণেয় কলমের সংখ্যা x $\therefore$ প্রতিটি কলমের দাম $\frac{240}{x}$ টাকা

প্রশ্নমতে, $\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$

বা, $\frac{240}{x+1} = \frac{240 - x}{x}$

বা, $240x = 240x + 240 - x^2 - x$

বা, $240x - 240x - 240 + x^2 + x = 0$

বা, $x^2 + x - 240 = 0$

বা, $x^2 + 16x - 15x - 240 = 0$

বা, $x(x + 16) - 15(x + 16) = 0$

বা, $(x + 16)(x - 15) = 0$

$\therefore \quad x + 16 = 0 \therefore x = -16$ অথবা, $x - 15 = 0 \therefore x = 15$

কিন্তু, $x \neq 16$, ফলে, $x = 15$ অর্থাৎ কলমের সংখ্যা 15 **Ans.**

■ **একটি স্কুলের শিক্ষার্থী সংখ্যার $\frac{2}{3}$ মানবিক বিভাগে ও $\frac{1}{6}$ বিজ্ঞান বিভাগে পড়ে। মানবিক বিভাগের শিক্ষার্থী সংখ্যা বিজ্ঞান বিভাগের চেয়ে 120 বেশি হলে, শিক্ষার্থী সংখ্যা নির্ণয় কর।**

সমাধান:

মনে করি, শিক্ষার্থী সংখ্যা x

প্রশ্নমতে, $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x = 120$

বা, $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = 120$

বা, $\frac{4x - x}{6} = 120$

বা, $\frac{3x}{6} = 120$ $\therefore x = 240$ ∴ নির্ণেয় শিক্ষার্থী সংখ্যা 240 **Ans.**

দুইটি সংখ্যার যোগফল 90। এদের মধ্যে বড়টি সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফলের 8 গুণ হলে সংখ্যাদ্বয় কি কি?

সমাধান:

মনে করি, সংখ্যাদ্বয়ের বিয়োগফল = x

∴ বড় সংখ্যাটি = 8x

প্রশ্নমতে,

$\frac{90 + x}{2} = 8x$ $\left\{\because \text{বড় সংখ্যাটি} = \frac{\text{যোগফল} + \text{বিয়োগফল}}{2}\right\}$

বা, $16x = 90 + x$

বা, $16x - x = 90$

বা, $15x = 90$

বা, $x = \frac{90}{15}$

বা, $x = 6$

∴ বিয়োগফল = 6

∴ বড় সংখ্যাটি = $8x = 8 \times 6 = 48$

ছোট সংখ্যাটি = $(90-48) = 42$

∴ নির্ণেয় উত্তর : বড় সংখ্যাটি = 48, ছোট সংখ্যাটি = 42

বিকল্প :

ধরি, বড় সংখ্যাটি x. এবং ছোট সংখ্যাটি খ

১ম শর্তমতে, $x + y = 90$ বা, $x = 90 - y$ ....(*i*)

২য় শর্তমতে,

$x = (x - y)\,8$

বা, $x = 8x - 8y$

বা, $-7x = -8y$

বা, $-7(90 - y) = -8y$

বা, $-630 + 7y = -8y$

বা, $15y = 630$

$\therefore y = \frac{630}{15} = 42$

y এর মান (*i*) বসিয়ে,

$x = 90 - 42$

$x = 48$

∴ নির্ণেয় বড় সংখ্যাটি 48 ছোট সংখ্যাটি 42

সরল ও দ্বিঘাত অসমতা

■ **a-এর কোন কোন মানের জন্য $a^2+1 < 2a + 4$ হবে?**

সমাধান:

$a^2 + 1 < 2a + 4$

বা, $a^2 - 2a + 1 - 4 < 0$

বা, $a^2 - 2a - 3 < 0$

বা, $a^2 - 3a + a - 3 < 0$

বা, $a(a - 3) + 1(a - 3) < 0$

বা, $(a - 3)(a + 1) < 0$

এখন, $(a - 3)(a + 1) < 0$ হলে উৎপাদকগুলোর একটি ধনাত্মক ও অন্যটি ঋণাত্মক হ

ফলে, $a - 3 < 0$ অথবা $a + 1 > 0$

বা, $a < 3$ $\therefore a > -1$

ফলে, $-1 < a < 3$ হতে হবে।

$\therefore -1 < a < 3$ (উত্তর)

■ **x–এর কোন কোন মানের জন্য $x^2 - 7x + 12 > 0$ হবে?**

সমাধান:

$x^2 - 7x + 12 > 0$

বা, $x^2 - 4x - 3x + 12 > 0$

বা, $x(x - 4) - 3(x - 4) > 0$

বা, $(x - 3)(x - 4) > 0$

x এর মান ধনাত্মক 3 ও 4 ব্যতীত আর সমস্ত মানের জন্য $x^2 - 7x + 12 > 0$ হবে।

■ **নিম্নলিখিত অসমতাটি $(x + 2)(2x + 3) > 0$**

x-এর মানসমূহের যে ব্যবধির জন্য বলবৎ থাকে তা নির্ণয় করুন। *(দ্বিঘাত অসমতা)*

সমাধান:

$(x + 2)(2x + 3) > 0$

বা, $2(x + 2)\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ বা, $(x + 2)\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$ $[\because 2 > 0]$

বা, $\{x - (-2)\}\left\{x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} > 0$ .... (i)

এখন, সমীকরণ (i) সত্য হবে যদি $\{x - (-2)\}$ এবং $\left\{x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$ এর উভয়ে বা উভয়েই ঋণাত্মক হয়।

এখন আমরা $\{x - (-2)\}$ এবং $\left\{x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$ এর চিহ্ন লক্ষ করি।

যখন	$\{x-(-2)\}$ এর চিহ্ন	$\left\{x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$ এর চিহ্ন
$x<-2$	$-$	$-$
$-2<x<-\frac{3}{2}$	$+$	$+$
$x>-\frac{3}{2}$	$+$	$+$

সুতরাং $x<-2$, $x>-\frac{3}{2}$ এবং $-2<x<-\frac{3}{2}$ এই ব্যবধিগুলোতে x এর মান সমূহের জন্য প্রদত্ত অসমতাটি বলবৎ থাকে। (উত্তর)।

$$\xleftarrow{x<-2}\ -2\ \xleftrightarrow{-2<x<-\frac{3}{2}}\ -\frac{3}{2}\ \xrightarrow{x>-\frac{3}{2}}\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

অনুপাত ও সমানুপাত

■ $\frac{a^3+b^3}{a-b+c}=a(a+b)$ হলে প্রমাণ করুন যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতিক।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a^3+b^3}{a-b+c}=a(a+b)$

বা, $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c}=a(a+b)$

বা, $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b+c}=a$ [উভয় পক্ষকে $(a+b)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a^2-ab+b^2=a(a-b+c)$

বা, $a^2-ab+b^2=a^2-ab+ac$

বা, $a^2-ab+b^2-a^2+ab-ac=0$

বা, $b^2-ac=0$

বা, $b^2=ac$

বা, $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$

বা, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

∴ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতিক (প্রমাণিত)

■ যদি $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y}$ এবং x, y, z সকলে পরস্পর সমান না হয়, তবে প্র... যে, প্রতি অনুপাতের মান -1 বা $\frac{1}{2}$ এর সমান হবে।

সমাধান: ধরি, $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = k$

$\therefore \quad \frac{x}{y+z} = k$, $\frac{y}{z+x} = k$ এবং $\frac{z}{x+y} = k$

$x = k(y+z)$ --------- (i)

$y = k(z+x)$ --------- (ii)

$z = k(x+y)$ --------- (iii)

সমীকরণ (i) – (ii) হতে পাই,

$x - y = k(y + z - z - x)$

বা, $x - y = k(y - x)$

বা, $x - y = -k(x - y)$

$\therefore \quad k = -1$

$\because$ যেহেতু প্রতিটি অনুপাতের মান k ধরা হয়েছে এবং $k = -1$

আবার, সমীকরণ (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$x + y + z = \{k(y+z) + k(z+x) + k(x+y)\}$

বা, $x + y + z = k(y + z + z + x + x + y)$

বা, $k(2x + 2y + 2z) = x + y + z$

বা, $2k(x + y + z) = x + y + z$

বা, $2k = 1 \;\therefore\; k = \frac{1}{2}$ ফলে $k = -1$ বা $\frac{1}{2}$ হবে।

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান -1 বা $\frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

■ যদি $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে দেখান যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(\sqrt{2a+3b})^2}{(\sqrt{2a-3b})^2}$ [বর্গ করে পাই]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2(x^2+1)}{4x} = \frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $3bx^2 + 3b = 4ax$

$\therefore$ $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$ (প্রমাণিত)

■ **যদি $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1$ হলে প্রমাণ করুন যে, $x = \frac{a}{1}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$**

সমাধান: দেওয়া আছে,

$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1$

বা, $\frac{1-ax}{1+ax} \cdot \frac{\sqrt{1+bx}}{\sqrt{1-bx}} = 1$

বা, $\frac{1-ax}{1+ax} = \frac{\sqrt{1-bx}}{\sqrt{1+bx}}$

বা, $\left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)^2 = \frac{1-bx}{1+bx}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1-2ax+a^2x^2}{1+2ax+a^2x^2} = \frac{1-bx}{1+bx}$

বা, $\frac{1-2ax+a^2x^2+1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2-1-2ax-a^2x^2} = \frac{1-bx+1+bx}{1-bx-1-bx}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2(1+a^2x^2)}{-2.2ax} = \frac{2}{-2bx}$

বা, $\frac{1+a^2x^2}{2ax} = \frac{1}{bx}$

বা, $\frac{1+a^2x^2}{2a} = \frac{1}{b}$

বা, $b(1+a^2x^2) = 2a$

বা, $1 + a^2x^2 = \frac{2a}{b}$

বা, $a^2x^2 = \frac{2a}{b} - 1$ বা, $x^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2a}{b} - 1\right)$

$\therefore\ x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b} - 1}$ (প্রমাণিত)

■ সমানুপাতের ধর্ম ব্যবহার করে দেখান যে, $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{4ab}{2a(a+b)}$ [উভয় পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন বিয়োজন করে পাই]

$\therefore\ \frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$ .... (i)

আবার, $x = \frac{4ab}{a+b}$ বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$ [উভয় পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে পাই] .... (ii)

সমীকরণ (i) + (ii) থেকে পাই,

$$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$$

$$= \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a} = \frac{3b+a-3a-b}{b-a}$$

$$= \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{(b-a)} = 2$$ (প্রমাণিত)

■ $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} - \sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}$

[যোজন-বিয়োজ

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} = \frac{\left(\sqrt[3]{m+1}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{m-1}\right)^3}$ [ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$

[পুনরায় যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^3+6x}{6x^2+2} = \frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)} = m$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = m$

বা, $x^3+3x = 3mx^2+m$

$\therefore x^3-3mx^2+3x-m = 0$ (প্রমাণিত)

■ যদি $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ *(অনুপাত ও সমানুপাত)*

সমাধান: $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$ ধরি।

$\therefore \frac{x}{b+c} = k$ বা, $x = k(b+c)$

আবার, $\frac{y}{c+a} = k \therefore y = k(c+a)$ এবং $\frac{z}{a+b} = k \therefore z = k(a+b)$

এখন, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{a}{k(c+a+a+b)-k(b+c)} = \frac{a}{k\cdot 2a} = \frac{1}{2k}$

এভাবে, $\frac{b}{z+x-y} = \frac{b}{k(a+b+b+c)-k(c+a)} = \frac{b}{k\cdot 2b} = \frac{1}{2k}$ ও $\frac{c}{x+y-z}$

$$= \frac{c}{k(b+c+c+a) - k(a+b)} = \frac{c}{k\cdot 2c} = \frac{1}{2k}$$

অতএব, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z} = \frac{1}{2k}$

অর্থাৎ $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ (প্রমাণিত)

■ $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ **হলে, প্রমাণ করুন যে, $c = a$ অথবা $a+b+c+d = 0$**

সমাধানঃ

$\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$

বা, $(b+c)(c+d) = (a+b)(d+a)$

বা, $bc + c^2 + bd + cd = ad + bd + a^2 + ab$

বা, $bc + c^2 + cd = ad + a^2 + ab$

বা, $bc - ab + c^2 - a^2 + cd - ad = 0$

বা, $b(c-a) + (c+a)(c-a) + d(c-a) = 0$

বা, $(c-a)(b+c+a+d) = 0$

বা, $(c-a)(a+b+c+d) = 0$

অতএব, $c - a = 0$ বা, $a+b+c+d = 0$

অর্থাৎ, $c = a$ বা, $a+b+c+d = 0$ (প্রমাণিত)

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

■ **সমাধান করুন :** $a(x+y) = b(x-y) = 2ab$

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশিমালা : $a(x+y) = 2ab$ .... *(i)*

$b(x-y) = 2ab$.................... *(ii)*

সমীকরণ (1) ও (2) থেকে পাই, $a(x+y) = b(x-y)$

বা, $ax + ay = bx - by$

বা, $ay + by = bx - ax$

বা, $y(a+b) = x(b-a)$

$\therefore y = \frac{x(b-a)}{a+b}$ ....*(iii)*

এখন সমীকরণ *(i)* এ y এর মান নিয়ে পাই, $a\left\{x + \frac{x(b-a)}{a+b}\right\} = 2ab$

বা, $a \times \frac{ax + bx + bx - ax}{a + b} = 2ab$

বা, $\frac{2bx}{a + b} = 2b$

বা, $2bx = 2b\,(a + b)$

বা, $x = \frac{2b\,(a + b)}{2b}$

বা, $x = (a + b)$

সমীকরণ (3) এ x এর মান বসিয়ে,

এখন, $y = \frac{x(b - a)}{a + b} = \frac{(a + b)\,(b - a)}{a + b} = b - a$

∴ নির্ণেয় **সমাধান**: $x = a + b$, $y = b - a$ **Ans.**

অপনয়ন পদ্ধতি

■ **সমাধান করুন** : $ax - cy = 0$

$ay - cx = a^2 - c^2$

সমাধান: প্রদত্ত রাশিমালা : $ax - cy = 0$.............................. *(i)*

$ay - cx = a^2 - c^2$ .... *(ii)*

সমীকরণ *(i)* কে a ও *(ii)* কে c দিয়ে গুণ করে পাই,

$a^2x - acy = 0$ .... *(iii)*

$acy - c^2x = c(a^2 - c^2)$ .... *(iv)*

এখন, সমীকরণ *(iii)* + *(iv)* থেকে পাই, $a^2x - c^2x = c(a^2 - c^2)$

বা, $x(a^2 - c^2) = c(a^2 - c^2)$

$\therefore\ x = \frac{c(a^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)} = c$

এখন *(i)* এ x এর মান নিয়ে পাই, $ac - cy = 0$

বা, $cy = ac \;\therefore\; y = \frac{ac}{c} = a$

∴ নির্ণেয় **সমাধান**: $x = c$, $y = a$ **Ans.**

নির্ণায়ক পদ্ধতি

■ **সমাধান করুন :** $bx - ay = 0$

$$ax + by = a^2 + b^2$$

সমাধান:

সমীকরণ জোটে নির্ণায়কের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} o & -a \\ a^2+b^2 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}} = \frac{b \times o - (-a)(a^2 + b^2)}{b^2 - (-a^2)}$$

$$= \frac{o + a(a^2 + b^2)}{b^2 + a^2}$$

$$= \frac{a(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)}$$

$$= a$$

এবং

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b & o \\ a & a^2+b^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & -a \\ a & b \end{vmatrix}} = \frac{b(a^2 + b^2) - a \times o}{b^2 - (-a^2)}$$

$$= \frac{b(a^2 + b^2)}{(b^2 + a^2)}$$

$$= \frac{b(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)}$$

$$= b$$

∴ নির্ণেয় **সমাধান:** $(x, y) = (a, b)$ **Ans.**

বজ্রগুণন পদ্ধতি

■ **সমাধান করুন :** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

$$ax - by = a^2 - b^2$$

সমাধান:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

$$ax - by = a^2 - b^2$$

প্রদত্ত সমীকরণ জোট সাজিয়ে পাই,

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y - 2 = 0 \text{ .... } (i)$$

$$ax - by + (b^2 - a^2) = 0 \text{ .... } (ii)$$

এখন, *(i)* নং ও *(ii)* নং বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{\frac{1}{b}(b^2-a^2)-2b}=\frac{y}{-2a-\frac{(b^2-a^2)}{a}}=\frac{1}{-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}$$

বা, $\frac{x}{\frac{b^2-a^2-2b^2}{b}}=\frac{y}{\frac{-2a^2-b^2+a^2}{a}}=\frac{1}{\frac{-b^2-a^2}{ab}}$

বা, $\frac{x}{\frac{-b^2-a^2}{b}}=\frac{y}{\frac{-a^2-b^2}{a}}=\frac{ab}{-b^2-a^2}$

এখানে, $\frac{x}{\frac{-b^2-a^2}{b}}=\frac{ab}{-b^2-a^2}$

বা, $x=\frac{ab}{(-b^2-a^2)}\times\frac{(-b^2-a^2)}{b}$

$\therefore\ x=a$

আবার,

$$\frac{y}{\frac{-a^2-b^2}{a}}=\frac{ab}{-b^2-a^2}$$

বা, $y=\frac{ab}{-b^2-a^2}\times\frac{-a^2-b^2}{a}$

বা, $y=\frac{ab}{(-b^2-a^2)}\times\frac{(-b^2-a^2)}{a}$

$\therefore\ y=b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (a, b)$ **Ans.**

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

■ **সমাধান করুন :** $ax + by = ab$

$bx + ay = ab$

সমাধান: প্রদত্ত রাশিমালা : $ax + by = ab$.................... *(i)*

এবং $bx + ay = ab$................................ *(ii)*

সমীকরণ *(i)* ও *(ii)* কে যথাক্রমে a ও b দিয়ে গুণ করে পাই,

$a^2x + aby = a^2b$............................ *(iii)*

$b^2x + aby = ab^2$............................ *(iv)*

এখন, সমীকরণ *(iii)* – *(iv)* থেকে পাই, $a^2x - b^2x = a^2b - ab^2$

বা, $x(a^2 - b^2) = ab(a - b)$

বা, $x = \frac{ab(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$

এখন x এর মান সমীকরণ *(ii)* এ নিয়ে পাই, $b \times \frac{ab}{a+b} + ay = ab$

বা, $\frac{b^2}{a+b} + y = b$ [উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $y = b - \frac{b^2}{a+b} = \frac{ab + b^2 - b^2}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$

∴ নির্ণেয় **সমাধান**: $x = \frac{ab}{a+b}$, $y = \frac{ab}{a+b}$ **Ans.**

■ **সমাধান করুন :** $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$

$x + y = 10$

সমাধান: প্রদত্ত রাশিমালা : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$ .... *(i)*

$x + y = 10$................ *(ii)*

সমীকরণ *(i)* থেকে পাই, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x} + \sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ {*(ii)* থেকে}

বা, . $\frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}$ ∴ $\sqrt{xy} = 4$ বা, $xy = 16$ .... *(iii)*

এখন, সমীকরণ *(ii)* কে x দিয়ে গুণ করে পাই, , $x^2 + xy = 10x$ .... *(iv)*

এখন, সমীকরণ *(iv)* ও *(iii)* থেকে পাই, $x^2 + 16 = 10x$ [xy = 16]

বা, $x^2 - 10x + 16 = 0$

বা, $x^2 - 8x - 2x + 16 = 0$

বা, $x(x-8) - 2(x-8) = 0$

বা, $(x-8)(x-2) = 0$

∴ $x - 8 = 0$

বা, $x = 8$

অথবা, $x - 2 = 0$ বা, $x = 2$

অতএব, সমীকরণ *(ii)* এ x এর মান নিয়ে পাই, $x = 8$ হলে $8 + y = 10$ ∴ $y = 2$

আবার, $x = 2$ হলে, $2 + y = 10$ ∴ $y = 8$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 8)$ বা $(8, 2)$ **Ans.**

■ **সমাধান করুন :**
$8y^x - y^{2x} = 16, 2^x = y^2$

সমাধান:
$8y^x - y^{2x} = 16$............(i)
$2^x = y^2$......................(ii)
সমীকরণ (i) থেকে পাই, $y^{2x} = 8y^x - 16$
বা, $y^{2x} - 8y^x + 16 = 0$
বা, $(y^x)^2 - 2\cdot y^x\cdot 4 + 4^2 = 0$
বা, $(y^x - 4)^2 = 0$
বা, $y^x = 4$ .... (iii)

আবার,
সমীকরণ (ii) থেকে পাই, $y = 2^{x/2}$
এখন,
y এর মান সমীকরণ (iii) এ নিয়ে, $2^{x^2/2} = 4 = 2^2$ $\therefore \frac{x^2}{2} = 2$ বা, $x^2 = 4$ $\therefore x = \pm 2$
এখন,
x এর মান 2 হলে, (iii) থেকে, $y^2 = 4$ বা, $y^2 = (\pm 2)^2$ $\therefore y = \pm 2$
আবার,
x-এর মান –2 হলে, (iii) থেকে, $y^{-2} = 4$ বা, $\frac{1}{y^2} = 4$ বা, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = (\pm 2)^2$
বা, $\frac{1}{y} = \pm 2$ $\therefore y = \pm \frac{1}{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ **Ans.**

■ **সমাধান করুন :** $2x + \frac{3}{y} = 1,\ 5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$

সমাধান: $2x + \frac{3}{y} = 1$ ---------------------------- (i)
$5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ ---------------------------- (ii)
সমীকরণ (i) কে 2 দ্বারা গুণ করে পাই– $4x + \frac{6}{y} = 2$ ---------------------------- (iii)
সমীকরণ (ii) কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই, $15x - \frac{6}{y} = \frac{33}{12}$ ---------------------- (iv)
সমীকরণ (iii) + (iv) হতে পাই, $4x + 15x = 2 + \frac{33}{12}$
বা, $19x = \frac{24 + 33}{12}$

বা, $19x = \frac{57}{12}$

বা, $x = \frac{57}{12\times19} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\quad\therefore\quad x = \frac{1}{4}$

x এর মান সমীকরণ *(i)* -এ নিয়ে পাই, $2.\frac{1}{4} + \frac{3}{y} = 1$

বা, $\frac{1}{2} + \frac{3}{y} = 1$

বা, $\frac{3}{y} = 1 - \frac{1}{2}$

বা, $\frac{3}{y} = \frac{2-1}{2}$

বা, $\frac{3}{y} = \frac{1}{2}$

বা, $y = 6 \quad \therefore y = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (\frac{1}{4}, 6)$. **Ans.**

বিকল্প: $2x + \frac{3}{y} = 1$ ------------------------ *(i)*

$5x - \frac{2}{y} = \frac{11}{12}$ ------------------------ *(ii)*

সমীকরণ *(i)* থেকে পাই, $\frac{3}{y} = 1 - 2x \quad \therefore y = \frac{3}{1-2x}$ ------ *(iii)*

এখন,

সমীকরণ *(ii)* এ y এর মান নিয়ে পাই, $5x - \frac{2(1-2x)}{3} = \frac{11}{12}$

বা, $\frac{15x - 2 + 4x}{3} = \frac{11}{12}$

বা, $\frac{19x - 2}{3} = \frac{11}{12}$

বা, $19x - 2 = \frac{11}{4}$ {উভয় পক্ষে 3 গুণ করে

বা, $76x - 8 = 11$

বা, $76x = 11 + 8 = 19. \quad \therefore x = \frac{19}{76}$

সমীকরণ *(iii)* এ x এর মান নিয়ে পাই, $y = \frac{3}{1 - 2\times\frac{1}{4}} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{1}{4}, y = 6$ **Ans.**

■ সমাধান করুন : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7, \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21$

সমাধান:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$ .... (i)

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) হতে, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21$

বা, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=21$

বা, $7\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=21$

বা, $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)=\frac{21}{7}=3$ .... (iii)

সমীকরণ (i) + (iii) হতে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=7+3$

বা, $\frac{2}{x}=10 \quad \therefore x=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

x এর মান সমীকরণ (i) বসাইয়া পাই, $\frac{1}{y}=7-\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{1}{y}=7-5=2 \quad \therefore y=\frac{1}{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধানঃ $(x, y)=\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ **Ans.**

■ **একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা ৩০ সে.মি.। এটার ক্ষেত্রফল ৫০ বর্গ সে.মি. হলে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য কত হবে?**

সমাধান:

ধরি আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = x মিটার

〃 প্রস্থ = y 〃

প্রশ্নমতে, ২ (x + y) = ৩০ ⇒ x + y = $\frac{৩০}{২}$ ⇒ x + y = ১৫ .... (i)

এবং xy = ৫০

এখন $x-y=\sqrt{(x+y)^2-8xy}$

$=\sqrt{(১৫)^2-8\times ৫০}=\sqrt{২২৫-২০০}=\sqrt{২৫}=৫ \; \{\because x>y\}$

∴ x − y = ৫ .... (ii)

(i) নং এর সাথে (ii) নং যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} x + y = ১৫ \\ x - y = ৫ \\ \hline ২x = ২০ \end{array} \quad [যোগ করে]$$

বা, $x = \frac{২০}{২}$

বা, $x = ১০$

উত্তর : দৈর্ঘ্য = ১০ মিটার।

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণের প্রয়োগ

■ **ব্যক্তি x টাকা 4% সরল মুনাফায় ও y টাকা 5% সরল মুনাফায় বিনিয়োগ করে বা টাকা মুনাফা পান। তিনি যদি x টাকা 5% ও y টাকা 4% মুনাফায় বিনিয়োগ করে তার মুনাফা হত 880 টাকা। x ও y এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

প্রথম শর্তমতে, x এর 4% + y এর 5% = 920

বা, $\frac{4x}{100} + \frac{5y}{100} = 920$

বা, $4x + 5y = 92000$ .... (i)

দ্বিতীয় শর্তমতে, x এর 5% + y এর 4% = 880

বা, $\frac{5x}{100} + \frac{4y}{100} = 880$

বা, $5x + 4y = 88000$ .... (ii)

সমীকরণ (i) + (ii) থেকে পাই, $9(x + y) = 180000$

$\therefore x + y = 20000$ .... (iii)

সমীকরণ (iii) কে 4 দিয়ে গুণ করে পাই, $4x + 4y = 80000$ .... (iv)

এখন, সমীকরণ (i) – (iv) থেকে পাই, $y = 12{,}000 \therefore x = 8000 \{\because x + y = 20000$

Ans. $x = 8000, y = 12000$

■ **দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের তিনগুণ। সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ গুনফল অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের বর্গের সমান হয়। সংখ্যাটি কত?**

সমাধান:

মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক x ও দশক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি হবে $10y + x$

প্রথম শর্তমতে, $10y + x = 3(x + y)$

বা, $3x + 3y = 10y + x$

বা, $2x = 7y$............ (i)

দ্বিতীয় শর্তমতে, $3(10y + x) = (x + y)^2$

বা, $9(x + y) = (x + y)(x + y)$

বা, $3 \times 3(x + y) = (x + y)^2 \{\because 10y + x = 3(x + y)\}$

বা, $9 = \frac{(x + y)(x + y)}{(x + y)}$

বা, $x + y = 9$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) কে 2 দিয়ে গুণ করে পাই, $2x + 2y = 18$

বা, $7y + 2y = 18 \{\because 2x = 7y\}$

বা, $9y = 18 \therefore y = \frac{18}{9} = 2$

এখন সমীকরণ (ii) এ y এর মান নিয়ে, $x + 2 = 9 \because x = 7$

অতএব সংখ্যাটি হবে $(10 \times 2 + 7)$ বা, $(20 + 7)$ বা, 27 **Ans.**

4টি চেয়ার ও 5টি টেবিলের দাম 2600 টাকা। 5টি চেয়ার ও 4টি টেবিলের দাম 2350 টাকা। প্রতিটি চেয়ার ও টেবিলের দাম আলাদাভাবে নির্ণয় করুন।

সমাধান:

মনে করি, প্রতিটি চেয়ার ও প্রতিটি টেবিলের দাম যথাক্রমে x ও y টাকা।

প্রশ্নমতে, $4x + 5y = 2600$ .... (i)

এবং $5x + 4y = 2350$ .... (ii)

সমীকরণ (i) + (ii) থেকে পাই, $9x + 9y = 4950$

বা, $9(x + y) = 4950$

$\therefore x + y = \frac{4950}{9} = 550$

এখন আবার, সমীকরণ (i) থেকে পাই, $4x + 4y + y = 2600$

বা, $4(x + y) + y = 2600$ $(\therefore x + y = 550)$

বা, $4 \times 550 + y = 2600$

বা, $2200 + y = 2600 \therefore y = 2600 - 2200 = 400$

আবার যেহেতু, $x + y = 550$

$\therefore x = 550 - y = 550 - 400 = 150$

∴ প্রতিটি চেয়ারের দাম 150 টাকা, টেবিলের দাম 400 টাকা।

উত্তর: চেয়ারের দাম 150 টাকা, টেবিলের দাম 400 টাকা।

বিকল্প: মনে করি, 1টি চেয়ার এর মূল্য x টাকা 1টি টেবিলের মূল্য y টাকা।

প্রশ্নমতে, $4x + 5y = 2600$ .... (i)

এবং $5x + 4y = 2350$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) − (১) থেকে পাই, $x - y = -250$ $\therefore x = y - 250$

সমীকরণ (i) এ x এর মান নিয়ে পাই, $4(y-250)+5y=2600$

বা, $4y-1000+5y=2600$

বা, $9y=3600 \therefore y=\frac{3600}{9}=400$

আবার, $x=y-250=400-250=150$

∴ প্রতিটি চেয়ারের দাম 150 টাকা, টেবিলের দাম 400 টাকা।

উত্তর : চেয়ারের দাম 150 টাকা, টেবিলের দাম 400 টাকা।

■ **দুই অংকবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অংকদ্বয়ের সমষ্টি ৯; অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে স... পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে ৪৫ কম। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

ধরি, দশকস্থানীয় অঙ্ক x ও একক স্থানীয় অঙ্ক y;

∴ সংখ্যাটি ১০x + y

১ম শর্তমতে,

x + y = ৯ .... (১)

স্থান বিনিময়ে প্রাপ্ত সংখ্যা = ১০y + x

∴ ২য় শর্তমতে,

১০y + x = ১০x + y − ৪৫

বা, ১০x + y − ৪৫ = ১০y + x

বা, ৯x − ৯y = ৪৫

বা, ৯(x − y) = ৫ × ৯ ∴ x − y = ৫ .... (২)

(১) + (২) থেকে, ২x = ১৪ ∴ x = $\frac{১৪}{২}$ = ৭ ∴ y = ৯ − ৭ = ২

অতএব, সংখ্যাটি = ১০ × ৭ + ২ = ৭০ + ২ = ৭২ (উত্তর)।

■ **১২০টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা ও দশ পয়সার মুদ্রা একত্রে ২৭ টাকা হলে, কোন্ প্রকারের মু... সংখ্যা কত?**

সমাধান:

মনে করি,

পঁচিশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা x

∴ দশ পয়সার মুদ্রার সংখ্যা (১২০ − x)

অতএব,

পঁচিশ ও দশ পয়সার মুদ্রার মান যথাক্রমে ২৫x পয়সা

ও ১০ (১২০ − x) পয়সা

প্রশ্নমতে, ২৫x + ১০ (১২০ − x) = ২৭ × ১০০

বা, ২৫x + ১২০০ − ১০x = ২৭০০

বা, ১৫x = ২৭০০ − ১২০০

বা, ১৫x = ১৫০০

$\therefore x = \frac{১৫০০}{১৫} = ১০০$

অতএব, পঁচিশ পয়সার মুদ্রা সংখ্যা ১০০ ও দশ পয়সার মুদ্রা সংখ্যা (১২০ – ১০০) বা ২০।
উত্তর : পঁচিশ পয়সা ১০০টি এবং দশ পয়সা ২০টি।

দুই অংক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অংক দুটির অন্তর 2; অংক দুটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি,
দশক স্থানীয় অংক $= x$
একক ॥ ॥ $= y$
$\therefore$ সংখ্যাটি হবে $= 10x + y$
প্রশ্নমতে, $y - x = 2$ .... *(i)*
[যেহেতু অংকটি স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 কম]
$\therefore$ $10y + x = 2(10x + y) - 6$
বা, $10y + x = 20x + 2y - 6$
বা, $10y - 2y + x - 20x + 6 = 0$
বা, $8y - 19x + 6 = 0$ .... *(ii)*
সমীকরণ *(i)* হতে, $y - x = 2$ বা, $y = 2 + x$ .... *(iii)*
সমীকরণ *(iii)* হতে $y = 2 + x$ এই মানটি সমীকরণ *(ii)* এ বসিয়ে পাই,
$8y - 19x + 6 = 0$
বা, $8(2 + x) - 19x + 6 = 0$
বা, $16 + 8x - 19x + 6 = 0$
বা, $22 - 11x = 0$
বা, $11x = 22$
বা, $x = \frac{22}{11}$
$\therefore$ $x = 2$
$x = 2$ এই মানটি সমীকরণ *(iii)* এ বসিয়ে পাই, $y = x + 2 = 2 + 2 = 4$
$\therefore$ সংখ্যাটি হবে $= 10x + y$ $= 10 \times 2 + 4$ $= 20 + 4 = 24$
উত্তর : সংখ্যাটি 24.

তিন চলক বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান ও এর প্রয়োগ

■ **সমাধান করুন:** $2x - y - z = 1$

$x + 3y + z = 6$

$x + y + 2z = 1$

সমাধান: $2x - y - z = 1$ .... *(i)*

$x + 3y + z = 6$................ *(ii)*

$x + y + 2z = 1$................ *(iii)*

(i) নং থেকে পাই, $2x - y - z = 1$

(ii) নং থেকে পাই, $\underline{x + 3y + z = 6}$

যোগ করে, $3x + 2y = 7$

$\therefore 3x + 2y - 7 = 0$ .... *(iv)*

(i) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$4x - 2y - 2z = 2$

(iii) নং থেকে পাই, $\underline{x + y + 2z = 1}$

যোগ করে, $5x - y = 3$

বা, $5x + y - 3 = 0$ .... *(v)*

এখন, $3x + 2y - 7 = 0$ .... *(iv)*

$5x - y - 3 = 0$ ....*(v)*

(iv) ও *(v)* নং থেকে বজ্রগুণন সূত্র মতে পাই, $\frac{x}{-6-7} = \frac{y}{-35+9} = \frac{1}{-3-10}$

বা, $\frac{x}{-13} = \frac{y}{-26} = \frac{1}{-13}$

$\therefore \quad x = \frac{-13}{-13} = 1$

$y = \frac{-26}{13} = 2$

x ও y এর মান *(i)* নং এ বসিয়ে পাই,

$2 - 2 - z = 1$

$\therefore \quad z = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় **সমাধান:** $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ (উত্তর)

■ **সমাধান করুন:** $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{5}$

$2z + 3y - 4z = 13$

সমাধান: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{5}$ ....*(i)*

$2z + 3y - 4z = 13$.............. *(ii)*

ধরি, *(i)* এ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{5} = k$

$\therefore\ x = 3k + 2, y = 4k - 1, z = 5k - 4$ ....*(iii)*

x, y ও z এর মানগুলো *(ii)* এ বসিয়ে পাই,

$2(3k + 2) + 3(4k - 1) - 4(5k - 4) = 13$

বা, $6k + 4 + 12k - 3 - 20k + 16 = 13$

বা, $-2k + 17 = 13$

বা, $2k - 17 = -13$

বা, $2k = 17 - 13$

বা, $2k = 4$

$\therefore\ k = 2$

k এর মান *(iii)* এ বসিয়ে পাই,

$x = 6 + 2 = 8$

$y = 8 - 1 = 7$

$z = 10 - 4 = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y, z) = (8, 7, 6)$ (উত্তর)

■ **সোনিয়া, বাবু ও রকির মাঝে 104 টাকা এমন ভাবে ভাগ করে দাও যেন সোনিয়ার অংশের দ্বিগুণ, বাবুর অংশের তিনগুণ ও রকির অংশের চারগুণ পরস্পর সমান হয়।**

সমাধান:

মনে করি, সোনিয়া, বাবু ও রকি যথাক্রমে x টাকা, y টাকা ও z টাকা পায়।

১ম শর্তমতে, $x + y + z = 104$ ....*(i)*

২য় শর্তমতে, $2x = 3y = 4z$ ....*(ii)*

সমীকরণ *(ii)* থেকে পাই, $2x = 4z \therefore x = \frac{4}{2}z = 2z$

এবং $3y = 4z \therefore y = \frac{4}{3}z$

এখন *(i)* সমীকরণ x ও y এর মান নিয়ে পাই, $2z + \frac{4}{3}z + z = 104$

বা, $\frac{6z + 4z + 3z}{3} = 104$

বা, $13z = 3 \times 104 \therefore z = \frac{3 \times 104}{13} = 24$

অতএব, রকি পায় 24 টাকা

এখন, যেহেতু, $x = 2r \therefore x = 2 \times 24 = 48$

ফলে, সোনিয়া পায় 48 টাকা

আবার, যেহেতু, $y = \frac{4}{3}z \therefore y = \frac{4}{3} \times 24 = 32$

অতএব, বাবু পায় 32 টাকা

Ans. সোনিয়া পায় 48 টাকা ; বাবু 32 টাকা ; রকি 24 টাকা।

দূরত্ব নির্ণয় ও সরলরেখার সমীকরণ বিষয়ক সমস্যাব

■ **এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র (−4, −3) এবং ব্যাস = 10**

সমাধান: দেওয়া আছে, ব্যাস = 10

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \frac{\text{ব্যাস}}{২} = \frac{10}{2} = 5$

আমরা জানি,

(p, q) বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ হলে বৃত্তের সমীকরণ, $(x-p)^2 + (y-q)^2 =$

$\therefore$ (−4, − 3) কেন্দ্র এবং 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট

বৃত্তের সমীকরণ:

$\{x-(-4)\}^2 + \{y-(-3)\}^2 = 5^2$

বা, $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$

বা, $x^2 + 2.x.4 + 4^2 + y^2 + 2.y.3 + 3^2 = 25$

বা, $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 25 = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$; ইহাই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ। **(উত্তর)**

■ **$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্রের প্রকৃতি উল্লেখ কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$

বা, $x^2 - 8x + y^2 - 10y - 8 - 0$

বা, $x^2 - 2.x.4 + 4^2 + y^2 - 2.y.5 + 5^2 - 16 - 8 - 25 = 0$

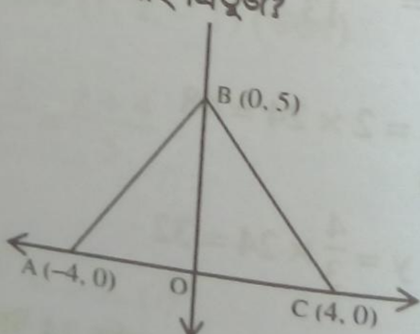
বা, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16 + 25 + 8$

বা, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49$

$\therefore (x-4)^2 + (y-5)^2 = 7^2$

ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ। এর কেন্দ্রের স্থানাংক (4, 5) এবং ব্যাসার্ধ 7 একক। (উত্ত

■ **প্রমাণ করুন যে, পাশের চিত্রটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ?**



সমাধান:

প্রথমত, AOB

সমকোণী ত্রিভুজে, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$= (-4)^2 + 5^2$

$= 16 + 25$

$\therefore AB^2 = 41$ ....(*i*)

আবার, BOC সমকোণী ত্রিভুজে,

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$= 5^2 + 4^2$

$= 25 + 16$

$\therefore BC^2 = 41$ .... (*ii*)

(i) ও (ii) হতে পাই, $AB^2 = BC^2$

$\therefore AB = BC$

(ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু) (প্রমাণিত)

বিকল্প : A ও B এর মধ্যকার দূরত্ব, $AB = \sqrt{(-4-o)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{16+25}$

$\therefore AB = \sqrt{41}$ .... (*i*)

আবার, C ও B এর মধ্যকার দূরত্ব, $CB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{16+25}$

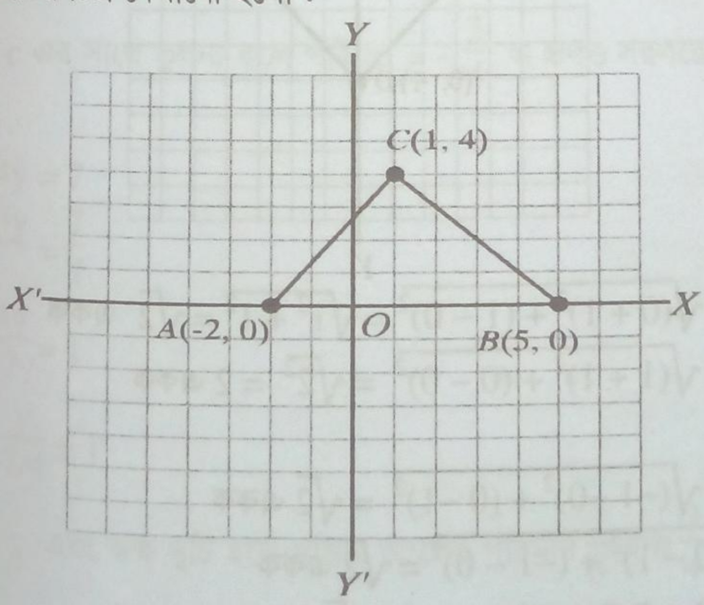
$\therefore CB = \sqrt{41}$ .... (*ii*)

(*i*) নং ও (*ii*) নং থেকে

যেহেতু $AB = CB$ $\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু (প্রমাণিত)

▌ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A (–2, 0), B (5, 0) এবং C (1, 4) প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি কী ধরনের অনুমান করুন এবং স্বপক্ষে যুক্তি দিন।

সমাধান: ত্রিভুজটির চিত্র দেখানো হলো :



$AB = c = \sqrt{(5-(-2))^2 + (0-0))^2} = \sqrt{49} = 7$ একক

$BC = a = \sqrt{(1-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক

$CA = b = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক

$S = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(7 + 4\sqrt{2} + 5 = \frac{1}{2}\ (12 + 4\sqrt{2}\ ) = 6 + 2\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})\ (6+2\sqrt{2}-7)\ \{(6+2\sqrt{2}) - 4\sqrt{2}\}\ (6+2\sqrt{2}-5)}$ বর্গ এ

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})\ (2\sqrt{2}-1)\ (6-2\sqrt{2})\ (2\sqrt{2}+1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})\ (6-2\sqrt{2})\ (2\sqrt{2}+1)\ (2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক

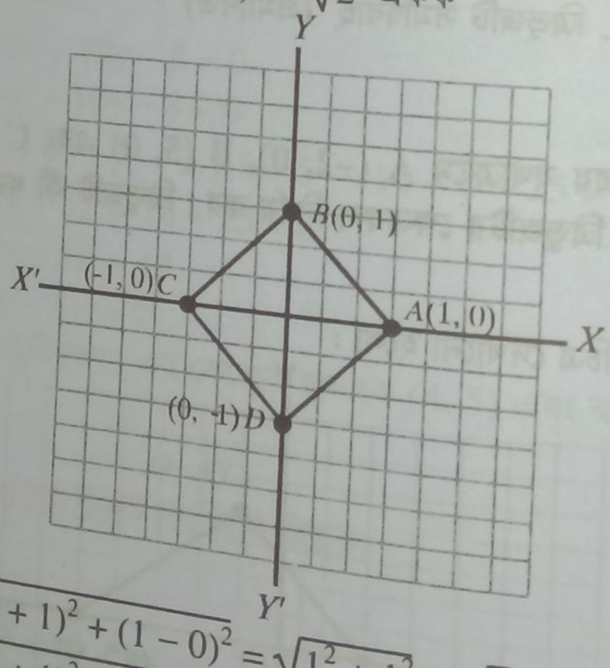
$= \sqrt{(6)^2 - (2\sqrt{2})^2\ \{(2\sqrt{2})^2 - 1^2\}} = \sqrt{28.7} = 14)$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ। কারণ এর কোন বাহুই অপর কোন বাহুর সমান নয়

■ **একটি চতুর্ভুজের ৪টি শীর্ষ যথাক্রমে A (1, 0), B (0, 1), C (–1, 0) এবং D(0, –1) চতুর্ভুজটির চিত্র আঁক এবং যে কোন দুই বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান: পার্শ্বের চিত্রে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে ABCD চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। AB, BC, CD এবং DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

বাহু $AB = c = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ একক



বাহু $BC = a = \sqrt{(0+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ একক

কর্ণ $AC = b = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$ একক

$\therefore AC^2 = 4$

বাহু $CD = c = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$ একক

বাহু $DA = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ বা রম্বস।

এখন, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2 + 2 = 4$

∴ চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র

∴ চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফল = 2 × ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল।

এখন ত্রিভুজ ABC এর পরিসীমা, $2s = AB + AC + BC = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

$s = \frac{1}{2}(2 + 2\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$ একক।

∴ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{2}+1) . 1(\sqrt{2}-1) . 1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(2)^2 - 1^2}$ বর্গ একক $= \sqrt{2-1}$ বর্গ একক

$= 1$ বর্গ একক

∴ চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = 2 × 1 বর্গ একক =2 বর্গ একক।

■ $3x + 4y = 7$ রেখার ঢাল এবং অক্ষ দুটি থেকে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ $3x + 4y = 7$

বা, $4y = 7 - 3x$

বা, $y = \frac{7-3x}{4}$

বা, $y = \frac{-3x}{4} + \frac{7}{4}$

$\therefore y = \frac{-3}{4}x + \frac{7}{4}$ ....(i)

(i) নং কে $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করলে পাই $m = -\frac{3}{4}$ যা প্রদত্ত সরলরেখাটির ঢাল।

আবার,

$3x + 4y = 7$

বা, $\frac{3x+4y}{7} = \frac{7}{7}$

বা, $\frac{3x}{7} + \frac{4y}{7} = 1$

$\therefore \frac{x}{7/3} + \frac{y}{7/4} = 1$

সুতরাং ঢাল $= -\frac{3}{4}$ এবং অক্ষ দুটি হতে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ $\frac{7}{3}$ এবং $\frac{7}{4}$ (উত্তর)।

■ একটি সরলরেখা নির্ণয় কর যা (–1, 3) এবং (4, –2) বিন্দু দিয়ে যায়?

সমাধান:

ধরি, সরলরেখাটির সমীকরন $y = mx + c$ ....*(i)* যেখানে রেখাটির ঢাল।

এখন, প্রদত্ত বিন্দুগুলো দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল $= \frac{3-(-2)}{-1-4} = \frac{3+2}{-5} = \frac{5}{-5}$

অর্থাৎ $m = -1$

যেহেতু *(i)* নং রেখাটি (– 1, 3) বিন্দু দিয়ে যায়

$\therefore 3 = (-1)(-1) + c \qquad | \therefore m = -1$

বা, $3 = 1 + c$

বা, $c = 3 - 1$

$\therefore c = 2$

(i) নং সমীকরণে c এবং m এর মান বসিয়ে পাই, $y = -x + 2$

$\therefore x + y = 2$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। (উত্তর)।

সূচক

■ $\frac{2^{x+4} - 4.2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2}$

সমাধান: $\frac{2^{x+4} - 4.2^{x+1}}{2^{x+2} \div 2}$

$= \frac{2^{x+1+3} - 4.2^{x+1}}{2^{x+2}.2^{-1}}$

$= \frac{2^{x+1}.2^3 - 4.2^{x+1}}{2^{x+2-1}}$

$= \frac{2^{x+1}(2^3 - 4)}{2^{x+1}}$

$= 2^3 - 4$

$= 8 - 4$

$= 4$ **Ans.**

■ $\frac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.6^m}{6^n.10^{m+2}.15^n}$

সমাধান: $\frac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.6^m}{6^n.10^{m+2}.15^n}$

$= \frac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.(3\times 2)^m}{2^n.3^n.(2\times 5)^{m+2}.(3\times 5)^n}$

$= \frac{2^{n+1}.3^{2n-m}.5^{m+n}.2^m.3^m}{2^n.3^n.2^{m+2}.5^{m+2}.3^n.5^n}$

$$= \frac{2^{n+1+m}.3^{2n-m+m}.5^{m+n}}{2^{n+m+2}.3^{n+n}.5^{m+2+n}}$$

$$= \frac{2^{m+n+1}.3^{2n}.5^{m+n}}{2^{m+n+2}.3^{2n}.5^{m+n+2}}$$

$$= 2^{m+n+1-m-n-2}.3^{2n-2n}.5^{m+n-m-n-2}$$

$$= 2^{-1}.3^{0}.5^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{5^2}$$

$$= \frac{1}{2\times 25}$$

$$= \frac{1}{50}\ \textbf{Ans.}$$

■ $\dfrac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \dfrac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

সমাধান:

$$\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$$

$$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$$

$$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$$

$$= 3^{2m+1-m^2} \div 3^{2m+3-m^2}$$

$$= 3^{2m+1-m^2-2m-3+m^2}$$

$$= 3^{-2}$$

$$= \frac{1}{3^2}$$

$$= \frac{1}{9}\ \textbf{Ans.}$$

■ **সরল করুন :** $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^m}$ *(সূচক)*

সমাধান: $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^m\left(p-\frac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^m\left(q-\frac{1}{p}\right)^m}$

$$= \frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^m\left(\frac{pq-1}{q}\right)^m}{\left(\frac{pq+1}{p}\right)^m\left(\frac{pq-1}{p}\right)^m}$$

$$= \left(\frac{\frac{pq+1}{q}}{\frac{pq+1}{p}}\right)^m\left(\frac{\frac{pq-1}{q}}{\frac{pq-1}{p}}\right)^m$$

$$= \left(\frac{pq+1}{q}\times\frac{p}{pq+1}\right)^m\left(\frac{pq-1}{q}\times\frac{p}{pq-1}\right)^m$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^m\left(\frac{p}{q}\right)^m = \left(\frac{p}{q}\right)^{2m} \textbf{ Ans.}$$

■ **সরল করুন : $a-\{(a^{-1}+(b^{-1}-a)^{-1}\}^{-1}$ যেখানে $a, b \neq 0$ এবং $ab \neq 1$**

সমাধান: $a-\{a^{-1}+(b^{-1}-a)^{-1}\}^{-1}$

$$= a-\left\{\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{b}-a\right)^{-1}\right\}^{-1}$$

$$= a-\left\{\frac{1}{a}+\left(\frac{1-ab}{b}\right)^{-1}\right\}^{-1}$$

$$= a-\left\{\frac{1}{a}+\frac{b}{1-ab}\right\}^{-1}$$

$$= a-\left\{\frac{1-ab+ab}{a(1-ab)}\right\}^{-1} = a-\left\{\frac{1}{a(1-ab)}\right\}^{-1}$$

$$= a-a(1-ab) = a-a+a^2b$$

$= a^2b$ $\therefore$ নির্ণেয় সরলমান $= a^2b$ **Ans.**

■ **সরল করুন : $p-[p^{-1}+(t^{-1}-p)^{-1}]^{-1}$**

সমাধান:

$p-[p^{-1}+(t^{-1}-p)^{-1}]^{-1}$

$$= p-\left[\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{t}-p\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= p-\left[\frac{1}{p}+\left(\frac{1-pt}{t}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$= p-\left[\frac{1}{p}+\frac{t}{1-pt}\right]^{-1}$$

$$= p-\left[\frac{1-pt+pt}{p(1-pt)}\right]^{-1}$$

$$= p-\left[\frac{1}{p(1-pt)}\right]^{-1}$$

$= p - \frac{p(1-pt)}{1}$

$= p - p + p^2t$

$= p^2t$ **(Ans.)**

■ $\left\{\frac{x^{(a-b)^2}}{x^{-3ab}}\right\}^{(a-b)}\left\{\frac{x^{(b-c)^2}}{x^{-3bc}}\right\}^{(b-c)}\left\{\frac{x^{(c-a)^2}}{x^{-3ca}}\right\}^{(c-a)}$ **= কত?**

সমাধান:

$$\left\{\frac{x^{(a-b)^2}}{x^{-3ab}}\right\}^{(a-b)}\left\{\frac{x^{(b-c)^2}}{x^{-3bc}}\right\}^{(b-c)}\left\{\frac{x^{(c-a)^2}}{x^{-3ca}}\right\}^{(c-a)}$$

$$= \left\{x^{a^2-2ab+b^2+3ab}\right\}^{(a-b)}\left\{x^{b^2-2bc+c^2+3bc}\right\}^{(b-c)}\left\{x^{c^2-2ca+a^2+3ca}\right\}^{(c-a)}$$

$$= \left\{x^{a^2+ab+b^2}\right\}^{a-b}\left\{x^{b^2+bc+c^2}\right\}^{b-c}\left\{x^{c^2+ca+a^2}\right\}^{c-a}$$

$$= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\,x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}\,x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$$

$$= x^{a^3-b^3}\,x^{b^3-c^3}\,x^{c^3-a^3}$$

$$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$$

$$= x^0 = 1 \text{ Ans.}$$

■ **সরল করুন :** $\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

সমাধান:

$$\frac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}} + \frac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

$$= \frac{a^2+b^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{a^2b^2-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}} + \frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)}{ab+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$$

$$= \frac{\frac{a^4b^2+a^2b^4-b^2-a^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4b^4-1}{a^2b^2}} + \frac{\left(\frac{a^2-1}{a}\right)\left(\frac{(b^2-1)}{b}\right)}{\frac{a^2b^2+1}{ab}}$$

$$= \frac{a^4b^2+a^2b^4-a^2-b^2}{a^2b^2}\times\frac{a^2b^2}{a^4b^4-1} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{ab}\times\frac{ab}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2(a^2b^2-1)+b^2(a^2b^2-1)}{a^4b^4-1} + \frac{(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a^2b^2-1)}{(a^2b^2)^2-1} + \frac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(a^2b^2-1)}{(a^2b^2+1)(a^2b^2-1)} + \frac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1} + \frac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2+b^2+a^2b^2-a^2-b^2+1}{a^2b^2+1}$$

$$= \frac{a^2b^2+1}{a^2b^2+1} = 1 \text{ Ans.}$$

■ দেখান যে, $\left\{\frac{x^{(p+q)^2}}{x^{pq}}\right\}^{p-q} \times \left\{\frac{x^{(q+r)^2}}{x^{qr}}\right\}^{q-r} \times \left\{\frac{x^{(r+p)^2}}{x^{rp}}\right\}^{r-p} = 1$

সমাধান:

ডানপক্ষ, $\left\{\frac{x^{(p+q)^2}}{x^{pq}}\right\}^{p-q} \times \left\{\frac{x^{(q+r)^2}}{x^{qr}}\right\}^{q-r} \times \left\{\frac{x^{(r+p)^2}}{x^{rp}}\right\}^{r-p}$

$$= \{x^{(p+q)^2-pq}\}^{p-q} \times \{x^{(q+r)^2-qr}\}^{q-r} \times \{x^{(r+p)^2-rp}\}^{r-p}$$

$$= x^{(p^2+2pq+q^2-pq)(p-q)} \times x^{(q^2+2qr+r^2-qr)(q-r)} \times x^{(r^2+2rp+p^2-rp)(r-p)}$$

$$= x^{(p-q)(p^2+pq+q^2)} \times x^{(q-r)(q^2+qr+r^2)} \times x^{(r-p)(r^2+rp+p^2)}$$

$$= x^{p^3-q^3} \times x^{q^3-r^3} \times x^{r^3-p^3}$$

$$= x^{p^3-q^3+q^3-r^3+r^3-p^3}$$

$= x^{\circ} = 1 =$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

লগারিদম

■ $7\log\frac{10}{9} - 2\log\frac{25}{24} + 3\log\frac{81}{80}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $7\log\frac{10}{9} - 2\log\frac{25}{24} + 3\log\frac{81}{80}$

$$= \log\left(\frac{5\times2}{3^2}\right)^7 - \log\left(\frac{5^2}{2^3.3}\right)^2 + \log\left(\frac{3^4}{2^4.5}\right)^3$$

$$= \log\frac{5^7.2^7}{3^{14}} - \log\frac{5^4}{2^6.3^2} + \log\frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}$$

$$= \log\left(\frac{5^7.2^7}{3^{14}} \div \frac{5^4}{2^6.3^2} \times \frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}\right)$$

$$= \log\left(\frac{5^7.2^7}{3^{14}} \times \frac{2^6.3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12}.5^3}\right)$$

$$= \log\frac{5^7.2^{7+6}.3^{2+12}}{3^{14}.5^7.2^{12}.5^{4+3}}$$

$$= \log(5^{7-7}.2^{13-12}.3^{14-14})$$

$$= \log(5^0.2^1.3$$

$$= \log 1.2.1$$

$= \log 2$ **Ans.**

■ $\dfrac{\log\sqrt{27}+\log 8-\log\sqrt{1000}}{\log 1.2}=?$

সমাধান: $\dfrac{\log\sqrt{27}+\log 8-\log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$

$$= \frac{\log(3^3)^{\frac{1}{2}}+\log 2^3-\log(10^3)^{\frac{1}{2}}}{\log\frac{12}{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+3\log 2-\frac{3}{2}\log(5\times 2)}{\log(3\times 4)-\log(5\times 2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+3\log 2-\frac{3}{2}\log 5-\frac{3}{2}\log 2}{\log 3+\log 4-\log 5-\log 2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+3\log 2-\frac{3}{2}\log 2-\frac{3}{2}\log 5}{\log 3+\log 2^2-\log 5-\log 2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+\left(3-\frac{3}{2}\right)\log 2-\frac{3}{2}\log 5}{\log 3+2\log 2-\log 5-\log 2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\log 3+\frac{3}{2}\log 2-\frac{3}{2}\log 5}{\log 3+\log 2-\log 5}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(\log 3+\log 2-\log 5)}{(\log 3+\log 2-\log 5)}=\frac{3}{2}$$ **Ans.**

সূচকীয় ও লগারিদম ফাংশন

■ যদি $\log_4 x = a$ এবং $\log_2 y = b$ হয় তবে xy এবং $\frac{x}{y}$ কে 2 এর শক্তিরূপে প্রকাশ কর? $xy = 128$ এবং $\frac{x}{y} = 4$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\log_4 x = a$

বা, $4^a = x$

বা, $x = 2^{2a}$ .... *(i)*

এবং $\log_2 y = b$

বা, $2^b = y$ $\therefore y = 2^b$ .... *(ii)*

(i) নং এবং *(ii)* নং সমীকরণ গুণ করে পাই, $xy = 2^{2a} \times 2^b = 2^{2a+b}$

(i) নং কে *(ii)* নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{x}{y} = \frac{2^{2a}}{2^b}$ $\therefore \frac{x}{y} = 2^{2a-b}$

এখন, $xy = 128$

বা, $2^{2a+b} = 128$

বা, $2^{2a+b} = 2^7$ $\therefore 2a + b = 7$ .... *(iii)*

আবার, $\frac{x}{y} = 4$ বা, $2^{2a-b} = 4$ বা, $2^{2a-b} = 2^2$ $\therefore 2a - b = 2$ .... *(iv)*

(iii) নং এবং *(iv)* নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $2a + b + 2a - b = 7 + 2$

বা, $4a = 9$ $\therefore a = \frac{9}{4}$

(iii) নং থেকে *(iv)* নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2a + b - 2a + b = 7 - 2$

বা, $2b = 5$ $\therefore b = \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $a = \frac{9}{4}$ এবং $b = \frac{5}{2}$ উত্তর : $\frac{9}{4}, \frac{5}{2}$

সমান্তর ধারা

■ **কোন সমান্তর ধারার m তম পদ m^2 ও nতম পদ n^2 হলে, এর (m + n) তম পদ কত?**

সমাধান:

সমান্তর ধারায়,

m তম পদ $= a + (m - 1) d = a + md - d$

n তম পদ $= a + (n - 1) d = a + nd - d$ | যখন ১ম পদ a এবং সাধারণ

প্রশ্নমতে, $a + md - d = m^2$................ *(1)*

$a + nd - d = n^2$.................... *(2)*

সমীকরণ, *(1) – (2)* থেকে পাই, $md - nd = m^2 - n^2$

বা, $d(m - n) = (m + n)(m - n)$

$\therefore d = m + n.$

d এর মান সমীকরণ (1) নিয়ে পাই, $a + m(m + n) - (m + n) = m^2$

বা, $a + m^2 + mn - m - n = m^2$

বা, $a - m + mn - n = 0$

$\therefore a = m - mn + n.$

$\therefore$ (m + n) তম পদ, $a + (m + n - 1)d = m - mn + n + (m + n - 1)(m + n)$

$= m - mn + n + m^2 + mn - m + mn + n^2 - n$

$= m^2 + mn + n^2$ **Ans.**

■ $9 + 7 + 5 + ...$ ধারাবাহিক n সংখ্যক পদের যোগফল – 144 হলে, n এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি,

n পদের যোগফল $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$ [যখন ১ম পদ a সাধারণ অন্তর d]

যেহেতু, $a = 9$ ও $d = -2$,

$\therefore$ n পদের যোগফল দাঁড়ায় : $\frac{n}{2}\{2.9 + (n-1)(-2)\}$

$= \frac{n}{2}\{18 - 2n + 2\}$

$= \frac{n}{2}\{20 - 2n\}$

$= \frac{n}{2} \times 2\,(10 - n) = n\,(10 - n)$

প্রশ্নমতে, $n(10 - n) = -144$

বা, $n(n - 10) = 144$

বা, $n^2 - 10n - 144 = 0$

বা, $n^2 - 18n + 8n - 144 = 0$

বা, $n(n - 18) + 8(n - 18) = 0$

বা, $(n - 18)(n + 8) = 0$

ফলে, $n - 18 = 0$ বা, $n = 18$ অথবা, $n + 8 = 0$ বা, $n = -8$

কিন্তু, n এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না বলে, $n = 18$ হবে।

Ans. $n = 18$

■ কোন ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি $n\,(n + 1)$ হলে, ধারাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে,

ধারাটির ১ম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= n\,(n + 1) = n^2 + n$

$n = 1, 2, 3, 4, ...$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$\therefore$ প্রথম পদ $S_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$\therefore$ প্রথম দুই পদের সমষ্টি, $S_2 = 2^2 + 2 = 6$

$\therefore$ প্রথম তিন পদের সমষ্টি $S_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

$\therefore$ প্রথম চার পদের সমষ্টি $S_4 = 4^2 + 4 = 16\;4 = 20$

....

....

....

$\therefore$ ধারাটির ১ম পদ $= 2$

দ্বিতীয় পদ $= S_2 - S_1 = 6 - 2 = 4$

তৃতীয় পদ $= S_3 - S_2 = 12 - 6 = 6$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটি হল $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots$

উত্তর : $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots$

■ **$1 + 4 + 7 + 10 + \ldots\ldots\ldots + 64$ এ ধারাটির পদসংখ্যা গুলির যোগফল ও গড় ক**

সমাধান: পদসংখ্যা $= \frac{\text{শেষ পদ}-\text{১ম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1 = \frac{64-1}{3} + 1 = \frac{63}{3} + 1 = 21 + 1 =$

ধারাটির যোগফল $= \frac{(\text{১ম পদ} + \text{শেষ পদ}) \times \text{পদসংখ্যা}}{2}$

$= \frac{(1 + 64) \times 22}{2} = 65 \times 11 = 715$

আবার, ধারার সংখ্যাগুলির গড় $= \frac{\text{শেষপদ} + \text{১মপদ}}{2} = \frac{64 + 1}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর : যোগফল $= 715$

গড় $= 32.5$

বিকল্প :

এটি একটি সমান্তর ধারা যার প্রথম পদ, $a = 1$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 4 - 1 =$

ধরি, n তম পদ $= 64$

বা, $a + (n - 1)d = 64$

বা, $1 + (n - 1)3 = 64$

বা, $1 + 3n - 3 = 64$

বা, $3n = 66$

$\therefore n = 22$

অর্থাৎ 22 তম পদ $= 64$

$\therefore$ 22টি পদের যোগফল $= \frac{22}{2}\{2a + (22 - 1)d\}$

$= 11\,(2 \times 1 + 21 \times 3)$

$= 11 \times (2 + 63)$

$= 11 \times 65$

$= 715$

$\therefore$ গড় $= (715 \div 22) = 32.5$

উত্তর : 715 এবং 32.5 ।

গুণোত্তর ধারা

■ একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চমপদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ a, সাধারণ অনুপাত r হলে,

৫ম পদ, ar^{5-1} বা, $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ .... (i)

দশম পদ, ar^{10-1} বা, $ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) ÷ (i) থেকে পাই, $r^5 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$

$$\text{বা, } r^5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5 \quad \therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

এখন, r এর মান সমীকরণ (i) এ নিয়ে পাই, $a\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$$\text{বা, } a \times \frac{4}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ ধারাটির ৩য় পদ $= ar^{3-1} = ar^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ans.

■ **$5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

সাধারণ অনুপাত r হলে, ২য় পদ $5 \times r^{2-1}$ বা, $5r = x$ ....(i)

৩য় পদ, $5 \times r^{3-1}$ বা, $5r^2 = y$ ....(ii)

৪র্থ পদ, $5 \times r^{4-1}$ বা, $5r^3 = 135$

বা, $r^3 = \frac{135}{5} = 27$

বা, $r^3 = 3^3 \quad \therefore r = 3$

এখন, সমীকরণ (i) থেকে, $x = 5r = 5 \times 3 = 15$,

সমীকরণ (ii) থেকে $y = 5r^2 = 5 \times 3^2 = 45$

Ans. $x = 15, y = 45$

৫. **$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম আটটি পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1-r^8)}{1-r} = \dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1\left\{1-\frac{1}{256}\right\}}{\frac{1}{2}} = \frac{1\times\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{255}{256}\times 2 = \frac{510}{256} \text{ Ans.}$$

■ **log2 + log4 + log8 + ... ধারটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?**

সমাধান:

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots$ ১০ম পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \ldots\ldots$ ১০ম পদ পর্যন্ত

$= \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \ldots\ldots$ ১০ম পদ পর্যন্ত

$= \log 2\,(1+2+3+\ldots\ldots + 10)$

$= \log 2 \times \dfrac{10(10+1)}{2}$ $\quad \left[1+2+3+\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \log 2 \times \dfrac{10\times 11}{2} = \log 2 \times 55 = 55\log 2$ **Ans.**

■ **প্রমাণ করুন :** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

সমাধান:

মনে করি, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2$

আমরা জানি, $r^3 - (r-1)^3 = r^3 - (r^3 - 3r^2 + 3r - 1)$

$= 3r^2 - 3r + 1$

এখানে, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ বসিয়ে পাই,

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

....

....

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

যোগ করে, $n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2)$

$-3(1+2+3\ldots+n) + (1+1+\ldots.+1)$

$= 3S - \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$ $\quad \left[\because 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

$\therefore 3S = n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ (প্রমাণিত)

সেট তত্ত্ব

■ **যেসব স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 ও 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে, তাদের সেট নির্ণয় করুন।**

সমাধান:

এক্ষেত্রে নির্ণেয় সংখ্যাগুলো 23 অপেক্ষা বড় ও (311 – 23) বা, 288 এবং (419 – 23) বা 396 এর সাধারণ গুনণীয়ক হবে।

এখন, ভাগ পদ্ধতিতে,

```
288)396(1
    288
    108)288(2
        216
         72)108(1
             72
             36)72(2
                72
                 ×
```

∴ এক্ষেত্রে নির্ণেয় গুণণীয়ক 36 যা 23 অপেক্ষা বড়। কিন্তু 36 এর অন্য উৎপাদকগুলো 23 অপেক্ষা ছোট।

∴ নির্ণেয় সেট = {36} Ans.

■ **যদি U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 3, 5}, B = {2, 4, 6} এবং C = {2, 3, 4, 5} হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$**

সমাধান:

বামপক্ষ : $(A \cap B) \cup C = \{(1, 3, 5) \cap (2, 4, 6)\} \cup \{2, 3, 4, 5\}$

$= \phi \cup \{2, 3, 4, 5\}$

$= \{2, 3, 4, 5\}$

ডানপক্ষ : $(A \cup C) \cap (B \cap C) = \{(1, 3, 5) \cup (2, 3, 4, 5)\} \cap \{(2, 4, 6,$
$5)\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$= \{2, 3, 4, 5\}$
$\therefore$ ডানপক্ষ = বামপক্ষ (প্রমাণিত)।

■ **সমাধান নির্ণয় করুন ও সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান : $|3x + 2| < 7$**

সমাধান:

$(3x + 2)$ ধনাত্মক হলে, প্রদত্ত অসমতা : $3x + 2 < 7$

বা, $3x < 5 \therefore x < 5/3$.

আবার, $(3x + 2)$ ঋণাত্মক হলে, প্রদত্ত অসমতা $-(3x + 2) < 7$

বা, $3x + 2 > -7$

বা, $3x > -7 - 2$

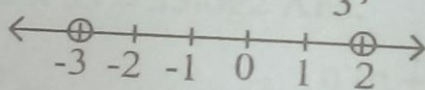
বা, $3x > -9 \therefore x > -3$

$\therefore x < 5/3$ ও $x < -3$

অতএব, $-3 < x < 5/3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $-3 < x < \frac{5}{3}$

অতএব, সমাধান সেট, $s = \{x \notin R : -3 < x < \frac{5}{3}\}$



■ **চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করুন : $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$**

সমাধান: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$= \frac{\sqrt{(3)}^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{(2)}^2}{\sqrt{(3)}^2 - \sqrt{(2)}^2} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2}$

$= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{1} = 5 - 2\sqrt{6} = 5 - 2 \times 2.449489$

$= 5 - 4.898978 = 0.101022 = 0.1010$ (প্রায়) **Ans.**

■ **যদি $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হয় তবে (x, y) নির্ণয় করুন।**

সমাধান: দেয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$

অতএব, $x - 1 = y - 2$ বা, $x - y = -1$ .... (1)

এবং $2x + 1 = y + 2$ বা, $2x - y = 1$ ....(2)

সমীকরণ (2) – (1) থেকে পাই, $x = 2$

এখন, x এর (1) এ বসিয়ে $2 - y = -1$ বা, $-y = -3 \therefore y = 3$

$\therefore x = 2, y = 3$ ∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 3)$ **Ans.**

ভেনচিত্র

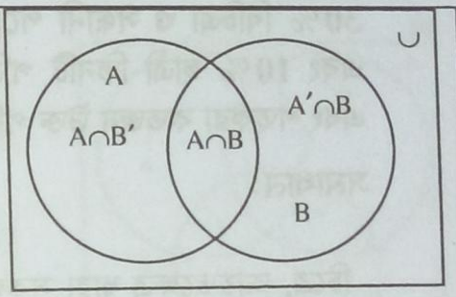
A ও B দুটি সান্ত সেট হলে প্রমাণ করুন যে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

সমাধান: মনে করি, A এবং B দুইটি সান্ত সেট এবং A, B ও $A \cup B$ সেটের উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে $n(A)$, $n(B)$, ও $n(A \cup B)$ দ্বারা সূচিত। প্রমাণ করতে হবে যে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

পাশের ভেনচিত্রে, সার্বিক সেট U এবং এটা স্পষ্ট যে ভেনচিত্রে প্রদর্শিত $A \cap B'$, $A' \cap B$ সেট তিনটি পরস্পর নিচ্ছেদ। চিত্রে দেখা যাচ্ছে,

$n(A) = n(A \cap B') + n(A \cap B)$

$n(B) = n(A \cap B) + n(A \cap B)$



$\therefore n(A) + n(B) = n(A \cap B') + n(A' \cap B) + n(A \cap B) + n(A \cap B)$

$\therefore n(A) + n(B) = n(A \cap B') + n(A' \cap B) + 2n(A \cap B)$ .... (1)

আবার ভেনচিত্র থেকে, $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B) = A \cap B' + A \cap B + A' \cap B$

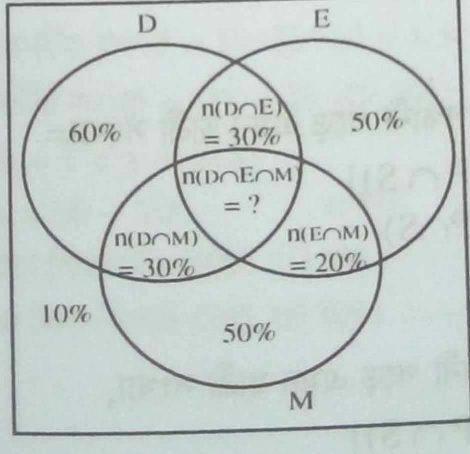
$\therefore n(A \cup B) = n(A \cap B') + n(A \cap B) + n(A' \cap B)$ .... (2)

(1) হতে (2) বিয়োগ করে পাই, $n(A) + n(B) - n(A \cup B) = n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (প্রমাণিত)

একটি টেলিভিশন সমীক্ষায় দেখা গেল যে দর্শকদের মধ্যে 60% নাটক, 50% শিক্ষামূলক অনুষ্ঠান, 50% ম্যাগাজিন অনুষ্ঠান, 30% নাটক ও শিক্ষামূলক অনুষ্ঠান 20% শিক্ষামূলক ও ম্যাগাজিন অনুষ্ঠান, 30% নাটক ও ম্যাগাজিন অনুষ্ঠান দেখেন। দর্শকদের 10% কোনও অনুষ্ঠান দেখেন না। শতকরা কতজন সব অনুষ্ঠান দেখেন?

সমাধান: মনে করি, কেবল নাটক, কেবল শিক্ষামূলক অনুষ্ঠান এবং ম্যাগাজিন অনুষ্ঠান দেখা দর্শকের সেট হল যথাক্রমে D, E এবং M.



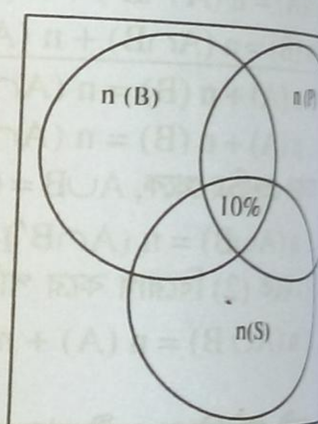
যেহেতু, 10% কোন অনুষ্ঠান দেখেন না, সুতরাং $n(D \cup E \cup M) = (100 - 10)\% = 90\%$

প্রদত্ত তথ্য থেকে $n(D) = 60\%$, $n(E) = 50\%$,
$n(M) = 50\%$. $n(D \cap E) = 30\%$, $n(E \cap M) = 20\%$ এবং $(D \cap M) = 30\%$.
আমরা জানি,
$n(D \cup E \cup M) = n(D) + n(E) + n(M) + n(D \cap E \cap M) - n(D \cap E) - n(E \cap M)$
$- n(D \cap M)$
$\therefore 90\% = 60\% + 50\% + 50\% + n(D \cap E \cap M) - 30\% - 20\% - 30\%$
বা, $90\% - 80\% = n(D \cap E \cap M)$বা অর্থাৎ 10% দর্শক সব অনুষ্ঠান দেখেন।
উত্তর : 10%।

■ **আনোয়ারা মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রী মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভ্যাস নিয়ে পরিচালিত সমীক্ষায় দেখা গেল 60% বিচিত্রা পড়ে, 50% সন্ধানী পড়ে, 50% পূর্বাণী পড়ে, 30% বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে, 30% বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে, 20% সন্ধানী ও পূর্বাণী পড়ে এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকায় পড়ে। শতকরা কতজন ছাত্রী তিনটির কোনটিই পড়ে না এবং শতকরা কতজন উক্ত পত্রিকার অন্তত দুইটি পড়ে?**

সমাধানঃ

চিত্রে, আয়তক্ষেত্র দ্বারা সকল ছাত্রীর সেট U প্রকাশ করা হয়েছে এবং পরস্পর চ্ছেদী বৃত্ত (B) বিচিত্রা, (S) সন্ধানী এবং (P) পূর্বাণী পত্রিকা পড়া ছাত্রীদের সেট চিত্রিত হয়েছে।



আমরা জানি,
$n(B \cup S \cup P) = n(B) + n(S) + n(P) - n(B \cap P) - n(B \cap S) - n(P \cap S) + n((B \cap S \cap P)$

$\therefore n(B \cup S \cup P) = 60 + 50 + 50 - 30 - 30 - 20 + 10 = 90$
$\therefore$ কোন পত্রিকা পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা $= 100 - 90 = 10\%$
$\therefore$ শতকরা 10 জন ছাত্রী তিনটি পত্রিকার একটিও পড়ে না।
এখন, শুধুমাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা=
$n\{(B \cap P) \setminus (B \cap P \cap S)\}$
$= n(B \cap P) \setminus n(B \cap P \cap S)$
$= 30 - 10$
$= 20\%$
আবার, শুধুমাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রী সংখ্যা=
$n\{(B \cap S) \setminus (B \cap P \cap S)\}$
$= n(B \cap S) \setminus n(B \cap P \cap S)$
$= 30 - 10$
$= 20\%$
এবং শুধুমাত্র পূর্বাণী ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রী সংখ্যা,
$n\{(P \cap S) \setminus (B \cap P \cap S)\}$
$= n(P \cap S) - n(B \cap P \cap S)$

$= 20 - 10$

$= 10\%$

$\therefore$ কেবল দুইটি পত্রিকা পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা $= 20 + 20 + 10 = 50\%$

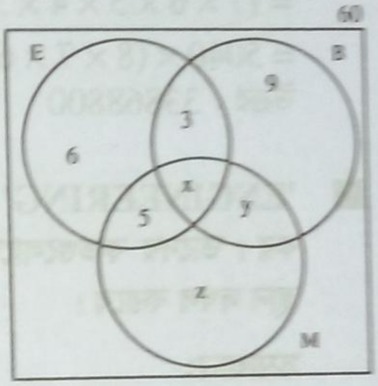
$\therefore$ শতকরা দুইটি পত্রিকা ছাত্রী 50%

উত্তর : 10%, 50%।

■ **কোন পরীক্ষায় 60 জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন বাংলায়, 24 জন ইংরেজিতে এবং 32 জন গণিতে ফেল করেছে। 9 জন কেবল মাত্রায় বাংলায়, 6 জন কেবলমাত্র ইংরেজিতে, 5 জন ইংরেজি ও গণিতে এবং 3 জন বাংলা ও ইংরেজিতে ফেল করেছে। ভেনের চিত্রের সাহায্যে কতজন তিন বিষয়ে ফেল এবং কতজন তিন বিষয়ে পাস তা নির্ণয় কর?**

সমাধান:

চিত্রে, আয়তক্ষেত্র দ্বারা 60 পরীক্ষার্থীর সেট এবং পরস্পর ছেদী বৃত্ত দ্বারা (B) বাংলা (E) ইংরেজি এবং (M) গণিত পরীক্ষায় অংশগ্রহনকারী পরীক্ষার্থীদের সেট প্রকাশ করে।



মনে করি, তিন বিষয়ে ফেল x জন, বাংলা ও গণিতে ফেল y জন এবং কেবলমাত্র গণিতে ফেল z জন।

$\therefore$ B সেটের উপাদান $= 9 + 3 + x + y = 25$ ....(i)

$\therefore$ E " " $= 6 + 3 + 5\ x = 24$ .... (ii)

$\therefore$ M " " $= x + y + z + 5 = 32$................ (iii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে পাই, $x + y = 13$ .... (iv)

সমীকরণ (ii) থেকে পাই $x = 10$ এবং (iii) থেকে পাই,

$x + y + z = 27$ ....(v)

এখন, x এর মান (iv) নং এ বসিয়ে,

$y = 13 - 10 = 3$

$\therefore\ y = 3$

আবার, x ও y এর মান (v) নং বসিয়ে পাই,

$10 + 3 + z = 27$

বা, $z = 27 - 13 \ \therefore z = 14$

$\therefore$ তিন বিষয়ে ফেল পরীক্ষার্থীর সংখ্যা $= B \cap E \cap M = x = 10$

$\therefore$ তিন বিষয়ে পাস শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= 60 - (E \cup B \cup M)$

$= 60 - (6 + 3 + 9 + 5 + x + y + z)$

$= 60 - (23 + 27) = 60 - 50 \qquad = 10$

$\therefore$ তিনটি বিষয়ে পাস করা শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10 জন।

উত্তর : তিন বিষয়ে পাশ ও তিন বিষয়ে ফেল 10 জন।

বিন্যাস

■ **দুইজন BSc পরীক্ষার্থীকে পাশাপাশি না বসিয়ে সাত জন HSC পরীক্ষার্থী ও পাঁচজন পরীক্ষার্থীকে এক লাইনে কত প্রকারে সাজানো যায়?**

সমাধান:

দুইজন BSc পরীক্ষার্থী পাশাপাশি বসবে না। অর্থাৎ দুইজন BSc পরীক্ষার্থীর মাঝে একজন HSC পরীক্ষার্থী বসবে। তাহলে সাতজন HSC পরীক্ষার্থীর মধ্যে BSc পরীক্ষার্থীর জন্য সম্ভাব্য আটটি স্থান হবে। পাঁচজন BSc পরীক্ষার্থীকে আটটি স্থানে $^8p_5$ প্রকারে সাজানো যাবে এবং HSC পরীক্ষার্থীদের মোট $^7p_7$ বা 7! প্রকারে সাজানো যাবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 7! \times {}^8p_5$

$= (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 8\ (8-1)\ (8-2)\ (8-3)\ (8-4)$

$= 5040 \times (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4) = 5040 \times 6720 = 33868800$

উত্তর : 33868800

■ **'ENGINEERING' শব্দটি সব কয়টি বর্ণকে কত বিবিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় কর। তাদের কতগুলোতে 'E' তিনটি একত্রে স্থল দখল করবে এবং কতগুলোতে উহারা প্রথম স্থান দখল করবে।**

সমাধান:

মোট 11টি অক্ষর আছে এর মধ্যে 3টি E, 3টি N, 2টি G ও 2টি I

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{11!}{3!\ 3!\ 2!\ 2!} = 277200$

E তিনটিকে একক অক্ষর ধরে যাকে 9টি অক্ষর, যার মধ্যে 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$\therefore$ E তিনটি একক অক্ষর হলে, বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{9!}{3!\ 2!\ 2!} = 15120$

E তিনটি দিয়ে শুরু হয় এমন বিন্যাসের সংখ্যা 'E' তিনটিকে বাইরে রেখে এবং বাকী বর্ণ দিয়ে গঠিত বিন্যাসসমূহের প্রতিটি পূর্বে স্থাপন করলে, 8টি বর্ণ বিশিষ্ট শব্দে, 3টি N, 2টি G এবং 2টি I.

$\therefore$ E দ্বারা শুরু হয়, এমন বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{3!\ 2!\ 2!} = 1680$

উত্তর : 1680

■ **প্রমাণ কর যে, 'America' শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে যত প্রকারে সাজানো যায়, Calcutta শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়?**

সমাধান:

'America' শব্দটিতে মোট বর্ণ আছে 7টি, যার একই বর্ণ A আছে 2টি।

$\therefore$ America শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা

$= \dfrac{7!}{2!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{2.1} = 2520$

আবার, Calcutta শব্দটিতে মোট বর্ণ আছে ৮টি, যার একই বর্ণ a আছে 2টি, c আছে 2টি এবং t আছে 2টি।

∴ Calcutta শব্দটির বর্ণগুলো একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা

$$= \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1.2.1} = 5040$$

এখন, Calcutta শব্দটির বর্ণ বিন্যাস ÷ America শব্দটির বর্ণ বিন্যাস = 5040 ÷ 2520 = 2 (প্রমাণিত)

সমাবেশ

■ প্রমাণ করুন যে, $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

প্রমাণ : $^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!}{r\,(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,.\,(n-r+1)\,.\,(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \cdot \frac{n+1}{r\,(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!}$$

$= {}^{n+1}C_r$ (প্রমাণিত)

■ 'Permutations' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে ১টি স্বরবর্ণ ও ২টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা সম্ভব যেন স্বরবর্ণটি সব সময় মাঝখানে থাকে?

সমাধান: 'Permutations' শব্দের ব্যঞ্জনবর্ণগুলো ও স্বরবর্ণগুলো হলো (p, r, m, t, t, n, s) এবং (e, u, a, i, o).

এখানে, একটি 't' বাদ দিয়ে বাকি 6টি ব্যঞ্জন বর্ণ (প্রত্যেকে ভিন্ন) থেকে 2টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

আবার, 5টি স্বরবর্ণ থেকে 1টি করে নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^5C_1 = 5$

∴ 3টি বর্ণের (2টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 1টি স্বরবর্ণ) মোট সমাবেশ সংখ্যা = 15 × 5 = 75.

এখন, প্রত্যেকটি সমাবেশের বর্ণগুলো সাজালে শব্দ গঠিত হবে। শর্তানুযায়ী স্বরবর্ণটি মাঝখানে থাকবে। সুতরাং ব্যঞ্জনবর্ণ দুইটি নিজেদের মধ্যে $^2P_2$ বা 2 উপায়ে সাজানো যায়।

∴ শব্দের মোট সংখ্যা = 75 × 2 = 150

আবার, ব্যঞ্জনবর্ণগুলো থেকে 2টি 't' ও স্বরবর্ণ থেকে 1টি নিয়েও শব্দ গঠন করা যায়।

$\therefore$ 2টি 't' ও 1টি স্বরবর্ণ সম্বলিত শব্দের সংখ্যা $= {}^2C_2 \times {}^5C_1 \times 1 = 1 \times 5 \times 1 = 5$

[$\therefore$ 2টি 't' নিজেদের মধ্যে 1 উপায়ে সাজানো যায়।]

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দের মোট সংখ্যা $= 150 + 5 = 155.$

■ **THESTS শব্দটির বর্ণগুলো হতে প্রতিবার 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয় কর।**

সমাধান: THESTS শব্দটিতে মোট 6টি অক্ষরের মধ্যে 2টি T আছে। একটি বাদ দিয়ে অবশিষ্ট 5টি অক্ষর হতে প্রতিবার 4টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা $= {}^5C_4 = 5$

আবার, 2টি S এর সঙ্গে অবশিষ্ট 4টি ভিন্ন অক্ষর প্রতিবার 2টি করে নিয়ে সংযোজন করে অক্ষরের সমাবেশ পাওয়া যাবে। এরূপ সমাবেশ সংখ্যা $= {}^4C_2 = 6.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা $= 5 + 6 = 11$

■ **8 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলার মধ্যে থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। একজন মহিলাকে সব সময় নিয়ে মোট কত প্রকারে কমিটি গঠিত হতে পারে?**

সমাধান: সম্ভাব্য কমিটি হলো :

	পুরুষ (8)	মহিলা (4)
a)	3	1
b)	2	2
c)	1	3
d)	0	4

$\therefore$ a) এর গঠনের উপায় $= {}^8C_3 \times {}^4C_1 = 56 \times 4 = 224$

$\therefore$ b) ,, ,, ,, $= {}^8C_2 \times {}^4C_2 = 28 \times 6 = 168$

$\therefore$ c) ,, ,, ,, $= {}^8C_1 \times {}^4C_3 = 8 \times 4 = 32$

$\therefore$ d) ,, ,, ,, $= {}^8C_0 \times {}^4C_4 = 1 \times 1 = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় দল সংখ্যা $= 224 + 168 + 32 + 1 = 425$

■ **12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 3টি কমিটি (প্রত্যেক কমিটিতে 4 জন ছাত্র নিয়ে) গঠন করতে হবে। কত উপায়ে ঐ কমিটিগুলো গঠন করা যায়?**

সমাধান: 12 জন ছাত্রের মধ্য থেকে 4 জন নিয়ে প্রথম কমিটি ${}^{12}C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়।

প্রথম কমিটি গঠনের পর দ্বিতীয় কমিটি $(12 - 4) = 8$ জন ছাত্রের মধ্য থেকে ${}^8C_4$ উপায়ে গঠন করা যায়।

এখন, প্রথম কমিটির প্রেক্ষিতে দ্বিতীয় কমিটির সংখ্যা ${}^8C_4$

∴ প্রথম দ্বিতীয় কমিটি গঠন করার উপায় সংখ্যা = $^{12}C_4 \times ^{8}C_4$

আবার, $^{12}C_4 \times ^{8}C_4$ সংখ্যক কমিটি গঠনের পর। প্রথম ও দ্বিতীয় কমিটি গঠনের একটি উপায়ের প্রেক্ষিতে অবশিষ্ট (12 – 8) বা 4 জন ছাত্রের মধ্যে থেকে তৃতীয় কমিটি গঠন করা যায় = $^{4}C_4$.

∴ তিনটি কমিটি গঠনের মোট উপায় = $^{12}C_4 \times ^{8}C_4 \times 1$

$= 495 \times 70 \times 1$

$= 34650.$

উত্তর : 34650.

এক পার্টিতে প্রত্যেকেই প্রত্যেকের সাথে করমর্দন করে। এভাবে মোট করমর্দন সংখ্যা 78 হলে, পার্টিতে কতজন উপস্থিত ছিলেন?

সমাধান: প্রত্যেক করমর্দন জন্য প্রয়োজন হয় 2 জন উপস্থিতির।

ধরি, পার্টিতে উপস্থিতি = n জন

$\therefore {}^{n}C_2 = 78$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 78$

$\Rightarrow n(n-1) = 156$

$\Rightarrow n^2 - n - 156 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 13n + 12n - 156 = 0$

$\Rightarrow n(n-13) + 12(n-13) = 0$

$\Rightarrow (n+12)(n-13) = 0$

$\therefore n - 13 = 0$ or $n + 12 = 0$

$\therefore n = 13 \quad \therefore n = -12$ [গ্রহণযোগ্য নয় কারণ মানুষ ঋণাত্মক হয় না]

∴ পার্টিতে উপস্থিতির সংখ্যা 13 জন।

একজন পরীক্ষার্থী 12টি প্রশ্ন হতে 6টির উত্তর করতে হবে। প্রথম 5টির ঠিক 4টি প্রশ্ন বাছাই করে কত প্রকারে 6টি প্রশ্ন উত্তর করা যাবে?

সমাধান: পরীক্ষার্থী প্রথম 5টি প্রশ্ন থেকে 4টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারে = $^{5}C_4 = 5$

আবার, 12 – 5 = 7টি প্রশ্ন থেকে 2টি প্রশ্ন বাছাই করতে পারে = $^{7}C_2 = 21$

∴ মোট বাছাই সংখ্যা = 5 × 21 = 105।

সম্ভাব্যতা

■ **একটা বাক্সে 4টা লাল, 5টা সাদা ও 6টা কালো বল আছে। দৈবভাবে একটা বল নে... বলটি (i) লাল (ii) সাদা ও (iii) কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত ?**

সমাধানঃ

বাক্সে মোট বলের সংখ্যা 4 + 5 + 6 = 15টি।

দৈবভাবে একটা বল নেয়া হলে 15টি বলের যেকোনো একটি আসতে পারে। সুত...
সম্ভাব্য ফলাফল = 15.

(i) ধরি, লাল বল হওয়ার ঘটনা R। বাক্সে মোট 4টা লাল বল আছে। এদের যে... একটি আসলেই লাল বল হবে। সুতরাং লাল বলের অনুকূল ফলাফল = 4.

$$\therefore P(R) = \frac{\text{লাল বলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{4}{15} \text{ (উত্তর)।}$$

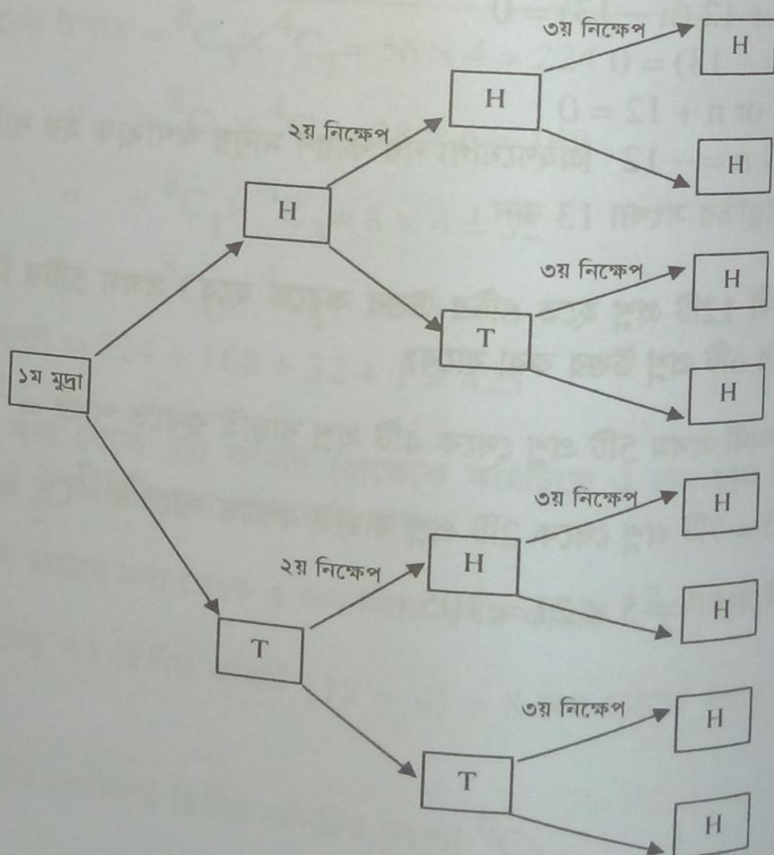
(ii) বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা W ধরি। যেহেতু বাক্সে 5টা সাদা বল আছে এ... থেকে একটা বল আসলে সাদা বল হবে, সুতরাং সাদা বলের অনুকূল ফলাফল 5

$$P(W) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \text{ (উত্তর)।}$$

(iii) বলটি কালো হওয়ার ঘটনা B ধরি। বাক্সে মোট 6টা কালো বল আছে এবং এদে... একটা বল আসলেই কালো বল হবে। সুতরাং কালো বলের অনুকূল ফলাফল 6.

$$P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \text{ (উত্তর)।}$$

■ **একটি মুদ্রা তিন বার নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্রটি Tree diagram এর মাধ্যমে দেখা... কমপক্ষে দুটি H (Head) পাওয়ার সম্ভাবনা কত?**



উপরের Tree diagram অনুযায়ী নমুনা ক্ষেত্রটি হচ্ছে = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
এখানে, কমপক্ষে দুটি H পাওয়ার অনুকূল নমুনা বিন্দু হচ্ছে HHH, HHT, HTH, THH. অর্থাৎ 4টি।

$$\therefore P(\text{কমপক্ষে দুটি H}) = \frac{\text{কমপক্ষে 2টি ঐ পাওয়ার নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$ (উত্তর)।

একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। উপরের পিঠে (i) কোন হেড নয় (ii) 1টি হেড (iii) কমপক্ষে 2টি হেড (iv) বড় জোড় 1টি হেড আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: [নমুনা ক্ষেত্রটি পূর্বের অংকে দেখানো হয়েছে]
একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলে যে নমুনা ক্ষেত্রটি হয় তা নিম্নরূপ :
নমুনা ক্ষেত্র = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 8টি
(i) মনে করি, কোন হেড নয়, এ রকম ঘটনা হচ্ছে A
∴ A ঘটনার অনুকূলে ফলাফল = {TTT}
অর্থাৎ A ঘটনার অনুকূলে ফলাপল সংখ্যা 1টি

$$\therefore \text{A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা, } P(A) = \frac{\text{অ ঘটনার অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}} = \frac{1}{8}$$ (উত্তর)।

(ii) মনে করি, 1টি হেড (H) এর রকম ঘটনা B.
∴ B ঘটনার অনুকূলে নমুনা বিন্দুগুলো হচ্ছে
HTT, THT, TTH

∴ B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা, $P(B) = \frac{3}{8}$ (উত্তর)।

(iii) মনে করি, কমপক্ষে 2টি হেডের ঘটনাটি হচ্ছে C. C এর অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 4টি (HHH, HHT, HTH, THH)

$\therefore P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (উত্তর)।

বি. দ্র. কমপক্ষে দুটি H আসার মানে দুইয়ের অধিক ও হতে পারে।
(iv) মনে করি, বড় জোড় 1টি হেড আমার ঘটনার হচ্ছে D.
D এর অনুকূলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 4টি (HTT, THT, TTH, TTT}

$\therefore P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (উত্তর)।

উল্লেখ্য যে, বড় জোড় 1টি হেড আসার মানেঃ কোনো H উঠবে না এটাও এর মধ্যে গণ্য হবে।

■ **50 জন লোকের মধ্যে 19 জন শিক্ষক, 22 জন কবি, 7 জন সাংবাদিক এবং বাকী মন্ত্রী। যদি ইচ্ছামত একজনকে নির্বাচন করা হয় তবে তিনি**

(ক) কবি হবার সম্ভাবনা কত?

(খ) সাংবাদিক অথবা মন্ত্রী হবার সম্ভাবনা কত?

(গ) শিক্ষক না হবার সম্ভাবনা কত?

(ঘ) কবি বা সাংবাদিক কোনটাই না হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ

নমুনা ক্ষেত্রে মোট ফলাফলের সংখ্যা = 50টি

ধরি, শিক্ষক = T, সাংবাদিক = J, কবি = P এবং মন্ত্রী = M.

(ক) $P(P) = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$ (উত্তর)

(খ) $P(J \text{ or } M) = P(J) + P(M) = \frac{7}{50} + \frac{2}{50} = \frac{9}{50}$ (উত্তর)

(গ) $P(\text{not } T) = 1 - P(T) = 1 - \frac{19}{50} = \frac{50-19}{50} = \frac{31}{50}$ (উত্তর)

(ঘ) $P(\text{neither } P \text{ nor } J) = P(T \text{ or } M) = \frac{19}{50} + \frac{2}{50} = \frac{21}{50}$ (উত্তর)

■ **একটি বাক্সে 4টি সাদা বল, 5টি লাল বল ও 6টি সবুজ বল আছে। উহা হতে 3টি বল নেয়া হল। তিনটি বলই লাল পাবার সম্ভাবনা কত?**

সমাধানঃ বাক্সে মোট বল সংখ্যা = 4 + 5 + 6 = 15টি

15টি বল হতে 3টি বল মোট $^{15}C_3$

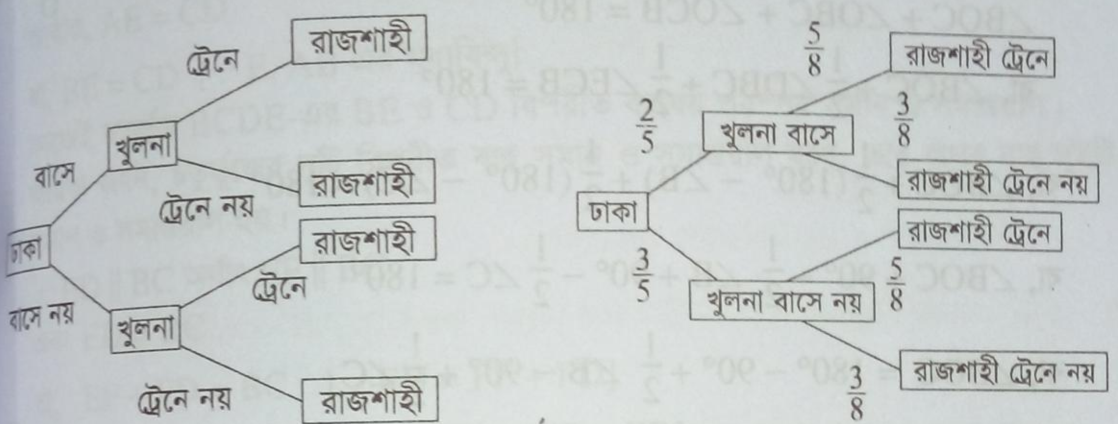
$= \frac{15.14.13}{3.2.1} = 455$ উপায়ে নেয়া যায়।

আবার, 5টি বল থেকে 3টি বল মোট $^{5}C_3 = \frac{5.4.3}{3.2.1}$

= 10 উপায়ে নেয়া যায়। $\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$ (উত্তর)

■ একজন লোক ঢাকা হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং খুলনা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$। লোকটি খুলনায় বাসে এবং রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা কত? Probability tree তৈরি করে দেখান।

সমাধান:
সম্ভাবনা মাধ্যমে Probability tree টি ডান পাশে দেখানো হল-



∴ লোকটির খুলনায় বাসে এবং রাজশাহীতে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা- P [খুলনা বাস, রাজশাহী ট্রেনে নয়] $= \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ (উত্তর)।

জ্যামিতি

ত্রিভুজ বিষয়ক উপপাদ্য

■ ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুদ্বয় যে বহিঃস্থ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাদের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করুন যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle A$.

সমাধান:
সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক 'O' বিন্দুতে মিলিত হলে $\angle BOC$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক 'O' বিন্দুতে মিলিত হয়েছে $\angle BOC$ কোণ মান নির্ণয় করতে হবে।
প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি ১৮০° বা দুই সমকোণ।